

ESCOLA UNIVERSITÀRIA POLITÈCNICA
DE VILANOVA I LA GELTRÚ

ENGINYER TÈCNIC DE TELECOMUNICACIÓ ESPECIALITAT EN SISTEMES ELECTRÒNICS
(PLA REFORMAT)

Apuntes de Señales y Sistemas Lineales

(Tema 1 y 2)

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones



UNIVERSITAT POLITECNICA DE CATALUNYA

Apuntes de Señales y Sistemas Lineales

(Tema 1 y 2)

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones

Indice

1. Señales y sistemas.

En cualquier transmisión de información hay dos elementos fundamentales: las señales, que serán las que contendrán la información y los sistemas, que son los encargados de manipular las señales y los que las conducirán de la fuente al destino. En este primer tema se realizarán toda una serie de definiciones, tanto sobre señales, como sobre sistemas, que permitirá caracterizarlos.

1.1. Señales. Tipos.

Hoy en día, cuando se oye hablar de señales uno automáticamente piensa en señales de naturaleza electromagnética, durante estos apuntes, salvo contadas excepciones, no se asignarán unidades a las señales, se las tratará de forma puramente matemática. Se realiza esta advertencia porque alguna de las definiciones que se realizarán dentro de este apartado, puede que induzca a pensar en un significado físico, sin embargo, no debe darse nunca un sentido físico.

Respecto a la naturaleza de las señales, se pueden clasificar de dos formas diferentes:

Una primera clasificación será entre señales deterministas y aleatorias:

Deterministas: son aquellas señales que admiten una expresión matemática que las define para cualquier instante de tiempo. Este tipo de señales no aparecen nunca en una comunicación, no es lógico transmitir una señal de la que se conoce su expresión matemática, sería más rápido trasmitir la función matemática de la define. Las señales determinista serán utilizadas para testear los sistemas y conocer si estos funcionan como es debido, o por el contrario, se utilizarán para caracterizar sistemas no conocidos.

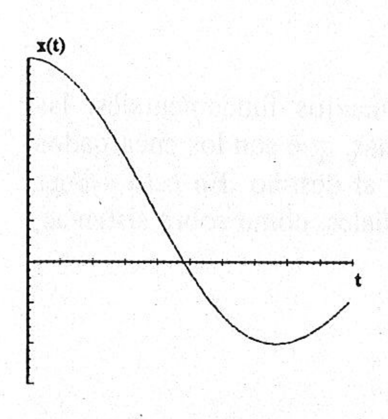
Aleatorias: son señales que no atiende a ninguna expresión matemática, sino que en cada instante de tiempo toman un valor, entre un conjunto de valores determinado, con una cierta probabilidad. Este tipo de señales constituyen las comunicaciones reales. Los parámetros que se puede conocer de las señales aleatorias son estadísticos: media, varianza, densidad de probabilidad, etc. Como se puede suponer, estos datos no son suficientes para poder comprobar si un sistema funciona o para caracterizar un sistema. De ahí que sean importantes las señales deterministas.

La segunda clasificación será entre señales analógicas (continuas) y discretas, digitales o numéricas. Dicha clasificación es doble, se puede realizar respecto a la variable tiempo o respecto al valor que va tomando la señal en los distintos instantes de tiempo. Las señales cuya discretización es sobre la variable tiempo suelen llamarse secuencias.

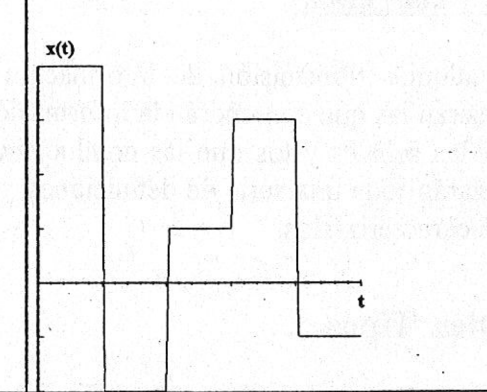
Analógica: son aquellas señales que entre un valor máximo y un valor mínimo tienen infinitos valores intermedios.

Discreta: son aquellas a las que entre un valor máximo y uno mínimo sólo les está permitido tomar un número finito de valores.

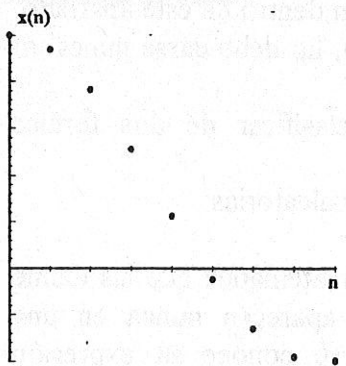
Señal continua en tiempo y en valor.



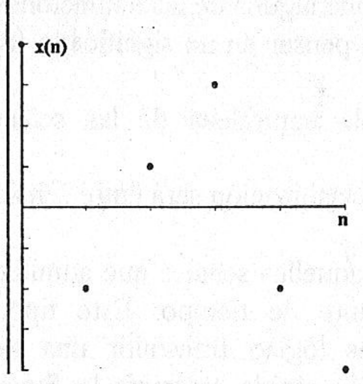
Señal continua en tiempo y discreta en valor.



Señal discreta en tiempo (secuencia) y continua en valor.



Señal discreta en tiempo (secuencia) y en valor.



1.1.1. Valores característicos de las señales.

Las señales, independientemente de como estén enmarcadas dentro de las clasificaciones que se acaban de realizar, se las caracteriza por diversos parámetros. Los más usuales son:

Valor instantáneo: es el valor que toma la señal en cada instante de tiempo.

$$x(t)$$

Valor de pico: es el valor máximo, tanto positivo como negativo, de la señal. Se suele expresar siempre como un número positivo.

$$|x(t)|_{máx}$$

Valor medio de la señal: es el valor que tomaría la señal si sus valores se repartieran por igual en todo el eje de tiempos. Tiene sentido en señales infinitas en tiempo.

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\,dt$$

En señales periódicas, la expresión anterior queda reducida a un periodo:

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\,dt$$ donde T es el periodo de la señ al

Potencia instantánea: a este parámetro no hay que buscarle un significado físico, no lo tiene, pese a que su nombre puede indicar lo contrario. Está definida como:

$$|x(t)|^2$$

Potencia de pico: es la potencia instantánea máxima.

$$|x(t)|^2_{máx}$$

Potencia media: tiene el mismo significado que el valor medio de la señal, pero con la potencia. Su definición es:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2\,dt$$

En señales periódicas, la expresión anterior queda reducida a un periodo:

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2\,dt \qquad \text{donde } T \text{ es el periodo de la señal}$$

Energía: tiene sentido en señales finitas en tiempo. Al igual que la potencia tampoco tiene significado físico. Su definición es:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt$$

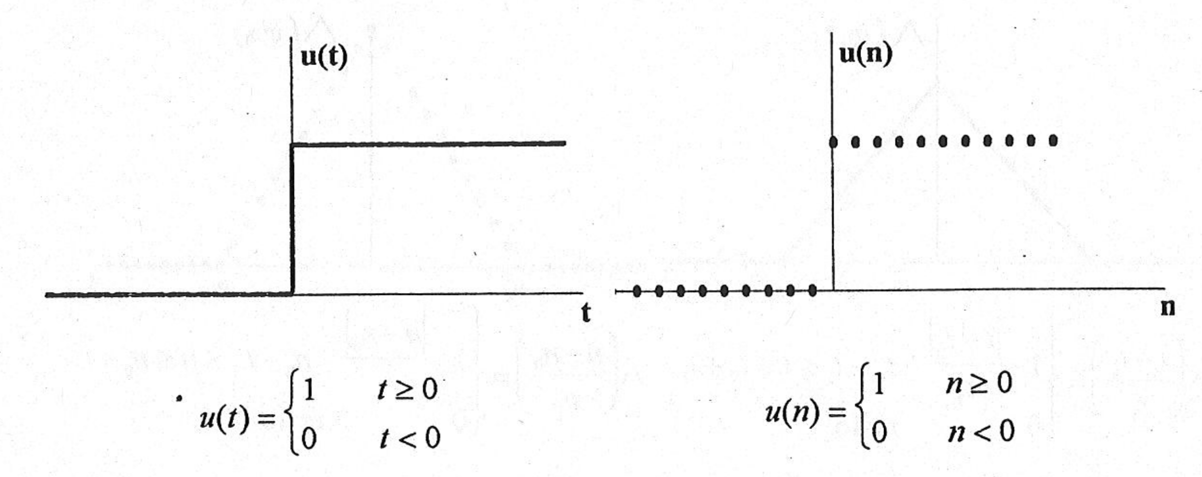
1.1.2. Señales más usuales. Definición.

Señales analógicas en tiempo
La variable tiempo es una variable continua, puede tomar cualquier valor.

Señales discretas en tiempo
La variable n es una variable discreta, sólo puede tomar valores enteros.

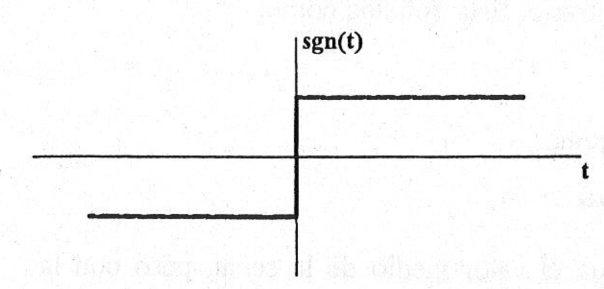
Función escalón analógica:

Secuencia escalón:



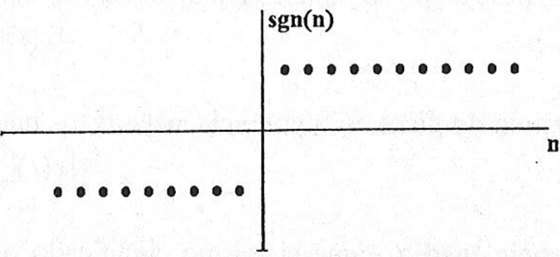
$$u(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases} \qquad u(n)=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$

Función signo analógica:



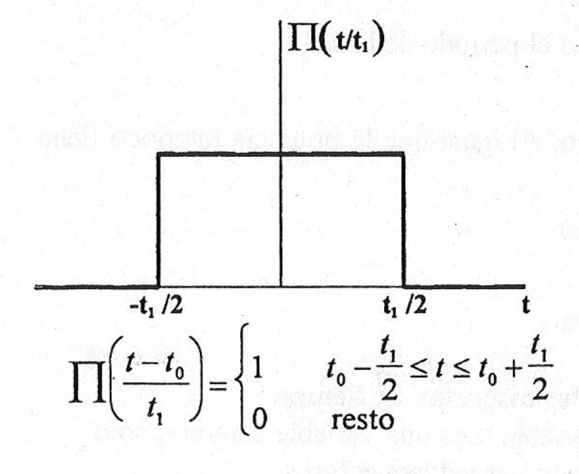
$$\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ -1 & t<0\end{cases}$$

Secuencia signo:



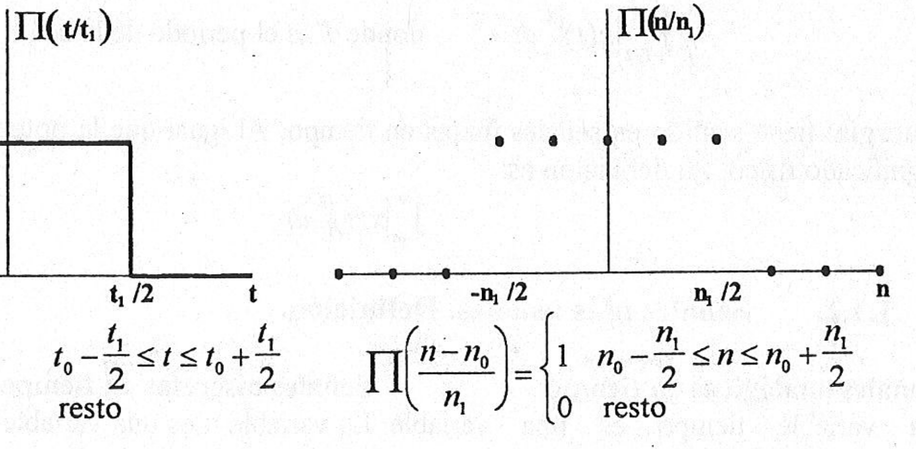
$$\mathrm{sgn}(n)=\begin{cases}1 & n>0\\ -1 & n<0\end{cases}$$

Función pulso analógica:



$$\prod\left(\frac{t-t_0}{t_1}\right)=\begin{cases}1 & t_0-\frac{t_1}{2}\le t\le t_0+\frac{t_1}{2}\\ 0 & \text{resto}\end{cases}$$

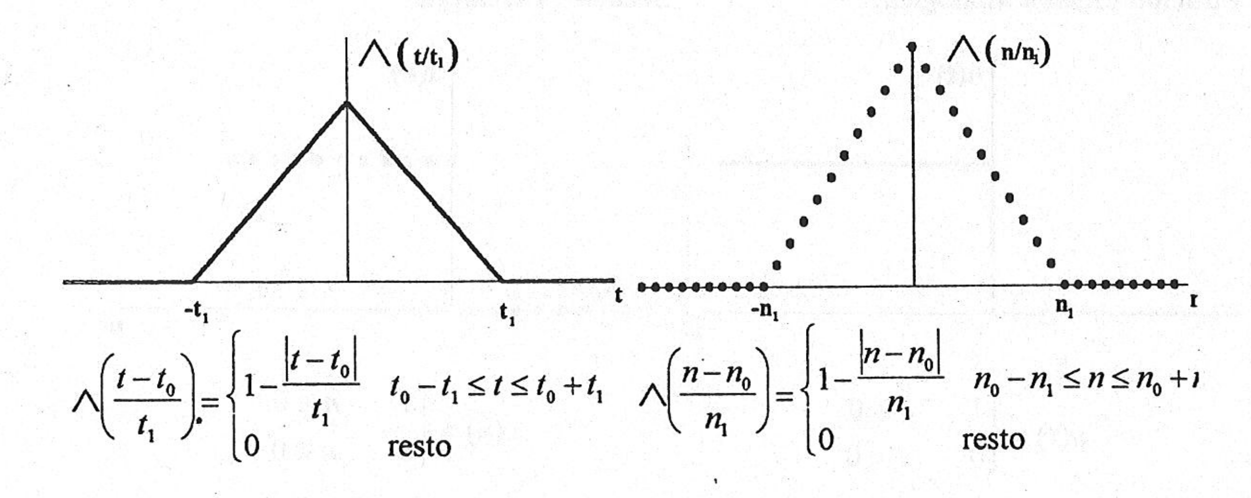
Secuencia pulso:



$$\prod\left(\frac{n-n_0}{n_1}\right)=\begin{cases}1 & n_0-\frac{n_1}{2}\le n\le n_0+\frac{n_1}{2}\\ 0 & \text{resto}\end{cases}$$

Función triángulo analógica:

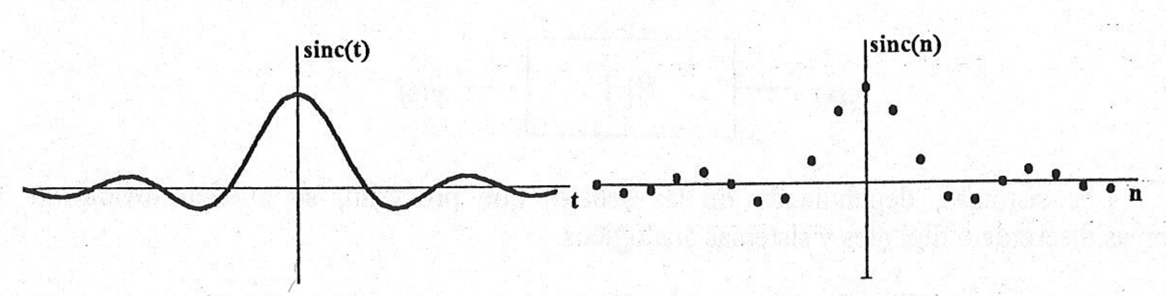
Secuencia triángulo:



$$\wedge\left(\frac{t-t_0}{t_1}\right)=\begin{cases}1-\frac{|t-t_0|}{t_1} & t_0-t_1\le t\le t_0+t_1\\ 0 & \text{resto}\end{cases}$$

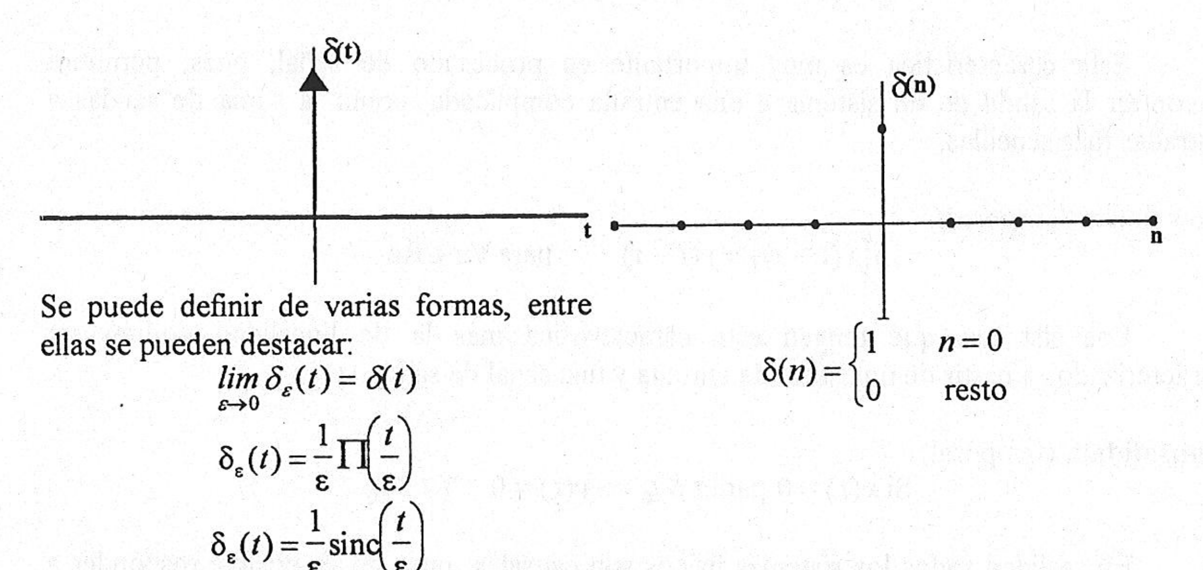
$$\wedge\left(\frac{n-n_0}{n_1}\right)=\begin{cases}1-\frac{|n-n_0|}{n_1} & n_0-n_1\le n\le n_0+\\ 0 & \text{resto}\end{cases}$$

Función sinc analógica: **Secuencia sinc:**



$$\mathrm{sinc}(at) = \frac{\mathrm{sen}(a\pi t)}{a\pi t} \qquad \mathrm{sinc}(an) = \frac{\mathrm{sen}(a\pi n)}{a\pi n}$$

Delta de Dirac (impulso): **Delta de Kronecker (Impulso discreto):**



Se puede definir de varias formas, entre ellas se pueden destacar:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t) = \delta(t)$$

$$\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\Pi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$$

$$\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$$

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

La Delta es un caso especial, es lo que en términos de álgebra se denomina un funcional, es decir, una función que sólo aparece bajo el signo de una operación. En el caso de la Delta de Dirac la operación bajo la que suele aparecer es la integral. Dada esta particularidad la Delta de Dirac se suele definir con estas características:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)\, dt = x(t_0)$$

En el caso discreto sucede lo mismo, con una pequeña diferencia; suele aparecer bajo el signo sumatorio y viene caracterizada por las propiedades:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) = 1 \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(n - n_0) = x(n_0)$$

1.2. Sistemas. Tipos.

Se puede definir un sistema como un conjunto de elementos que tienen una determinada finalidad, pero desde el punto de vista que interesa en procesado de señal, también se puede definir como una ley de correspondencia que asigna a un conjunto de entradas, $x_i(t)$, un conjunto de salidas, $y_i(t)$. Por tanto, se puede caracterizar un sistema por una función matemática, S[·], tal que:

$$y(t) = S[x(t)]$$

x(t) → S[ ] → y(t)

Los sistemas, dependiendo de las señales que procesan, se pueden dividir en sistemas discretos o digitales y sistemas analógicos.

1.2.1. Características de los sistemas

Linealidad.

$$S[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = \alpha S[x_1(t)] + \beta S[x_2(t)]$$

Esta característica es muy importante en procesado de señal, pues, permitirá encontrar la salida de un sistema a una entrada complicada, como la suma de salidas a entradas más sencillas.

Invarianza temporal.

$$S[x(t-\tau)] = y(t-\tau) \qquad \text{para} \ \forall \tau \in \text{Re}$$

Los sistemas que tengan esta característica más la de linealidad podrán ser caracterizados a partir de una señal de entrada y una señal de salida.

Causalidad. (temporal)

$$\text{Si } x(t) = 0 \text{ para } t \leq t_0 \Rightarrow y(t) = 0 \quad \forall\, t \leq t_0$$

En realidad todos los sistemas físicos son causales, pues no es posible responder a una entrada antes de tener entrada. Sin embargo, matemáticamente es posible definirlos, por tanto, es algo que se tendrá que tener en cuenta al diseñarlos.

Estabilidad. (dentro de sistemas lineales)

$$\text{Si } |x(t)| < M < \infty \Rightarrow |y(t)| < M'$$

Invertibilidad.

Un sistema será invertible sí, definiendo el sistema como y(t)=S[x(t)], existe otro sistema tal que $S_i[y(t)]=k\cdot x(t-t_0)$.

x(t) → S[ ] → y(t) → Si[ ] → $Kx(t-t_0)$

Existen más características propias de los sistemas, pero las nombradas anteriormente son las más importantes. Las características enunciadas se definen por igual en sistemas discretos y en sistemas analógicos.

1.2.2. Respuesta impulsional.

Se define como respuesta impulsional de un sistema la respuesta del sistema cuando la entrada del sistema es una Delta de Dirac.
Si x(t)=δ(t):

h(t)=S[δ(t)] Respuesta impulsional

Si el sistema no es invariante en el tiempo: $h(t,t_0)=S[\delta(t-t_0)]$
El sistema, en este caso, tendrá una respuesta impulsional diferente para cada retardo t_0.

Aunque la respuesta impulsional, por definición, se podría encontrar para cualquier sistema, en el siguiente apartado se mostrará que sólo tiene sentido definirla en sistemas lineales, por tanto, siempre que se hable de respuesta impulsional se entenderá como perteneciente a un sistema lineal.

1.3. Sistemas lineales e invariantes en el tiempo. (L.T.I)

Los sistemas L.T.I. permiten ser caracterizados por completo por la respuesta impulsional.

Si se dispone de un sistema L.T.I., al que se excita con una señal x(t):

$$y(t)=S[x(t)]=S\left[\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right]=\int_{-\infty}^{\infty}S[x(\tau)\delta(t-\tau)]d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)S[\delta(t-\tau)]d\tau=$$

$$\uparrow \qquad\qquad \uparrow$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \qquad \text{linealidad}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t,\tau)d\tau$$

Como además, el sistema es invariante en el tiempo:

$$h(t,\tau)=h(t-\tau)$$

por tanto, se obtiene como resultado final:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Esta expresión es conocida como **integral de convolución.**

Haciendo un resumen del apartado, en un sistema L.T.I., se puede conocer la respuesta a cualquier excitación, simplemente conociendo la respuesta impulsional, que caracteriza por completo este tipo de sistemas, y la excitación. Si el sistema no tiene las características L.T.I., la respuesta impulsional no caracteriza al sistema.

En general, se suele utilizar la nomenclatura respuesta impulsional para la respuesta a una delta, solamente en sistemas L.T.I.

1.4. Convolución.

La integral de convolución, normalmemte llamada convolución, está definida como:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Por simplificar la expresión la notación que generalmente se utiliza es:

$$y(t)=x(t)*h(t)$$

1.4.1. Propiedades de la convolución.

Conmutativa.

$$y(t)=x(t)*h(t)=h(t)*x(t)$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Para demostrar esta propiedad simplemente hay que realizar el cambio de variable: $\tau = t-\tau$

Asociativa.

$$y(t)=(x(t)*y(t))*z(t)=x(t)*(y(t)*z(t))$$

Para demostrar la propiedad asociativa, se deben sustituir las convoluciones por su expresión integral y cambiar de orden las integrales.

Distributiva.

$$(\alpha x(t)+\beta y(t))*z(t)=\alpha x(t)*z(t)+\beta y(t)*z(t)$$

Todas las propiedades que aparecen en esta relación y en particular la distributiva, son fácilmente demostrables si se tiene en cuenta que la convolución no es más que una integral y, por tanto, tendrá las propiedades de la operación integral.

Derivación.

$$\frac{d}{dt}(x(t)*y(t))=\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)*y(t)=x(t)*\left(\frac{d}{dt}y(t)\right)$$

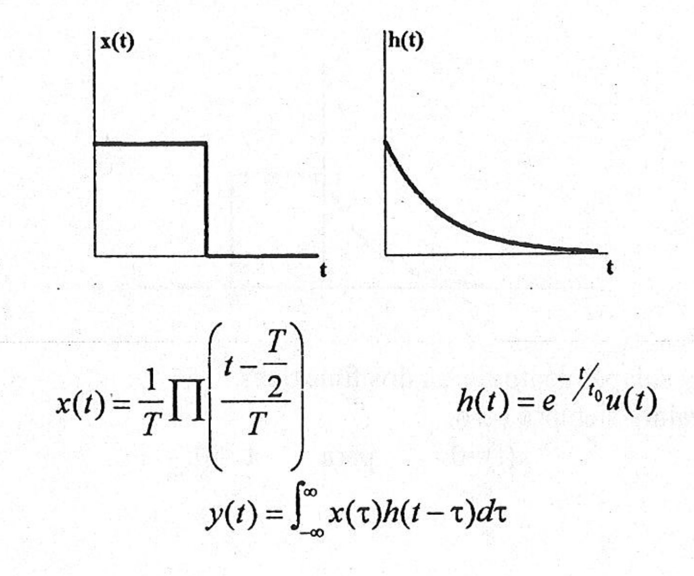
Elemento neutro.

$$x(t)*\delta(t)=\delta(t)*x(t)=x(t)$$

Esta propiedad era una de las características de la Delta de Dirac.

1.4.2. Ejemplo: Resolución gráfica de la convolución.

Calcular la convolución de:

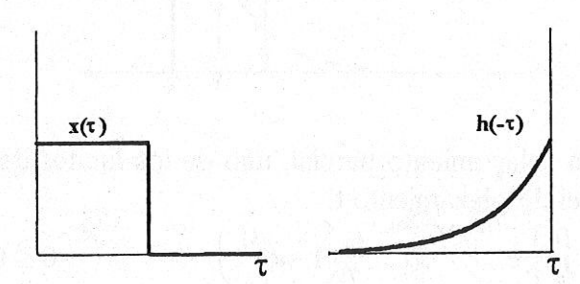


$$x(t) = \frac{1}{T}\prod\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right) \qquad h(t) = e^{-t/t_0}u(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

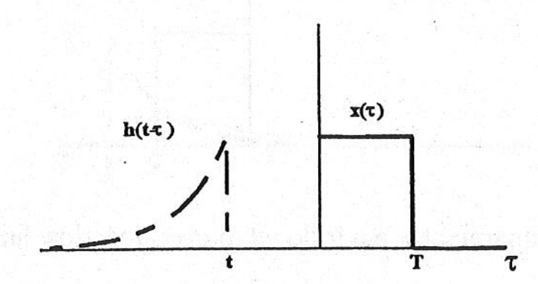
Primer paso:

Realizar el cambio de variable $\tau = -\tau$ para invertir una de las señales, normalmente la que sea más fácil, recuerde que la convolución tiene la propiedad conmutativa. Gráficamente representa la inversión de sentido de una de las funciones.



Segundo paso:

Desplazar la señal que se ha invertido desde -∞ hasta ∞, para, posteriormente, ir calculando la integral. Para forzar el desplazamiento de forma fácil, es conveniente realizar el cambio de variable: $-\tau = t - \tau$, en la función que en el primer paso se ha invertido.



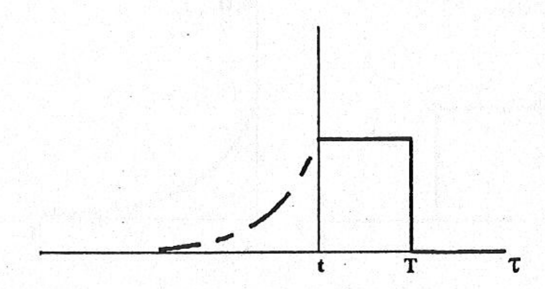
Tercer paso:

El último paso es calcular la integral del producto de las dos funciones para cada desplazamiento t.

A la hora de realizar el cálculo, conviene realizarlo por tramos, en los cuales los limites de la integral sean los mismos.

Aplicando este consejo al ejemplo propuesto, el tercer paso, se subdividirá en tres tramos.

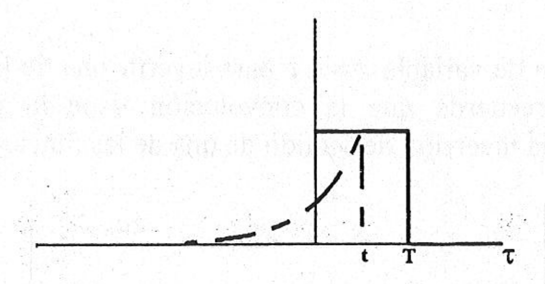
Primer tramo.



t ≤ 0 ; no hay solapamiento de las dos funciones.
La integral valdrá siempre cero.

y(t)=0 para t ≤ 0.

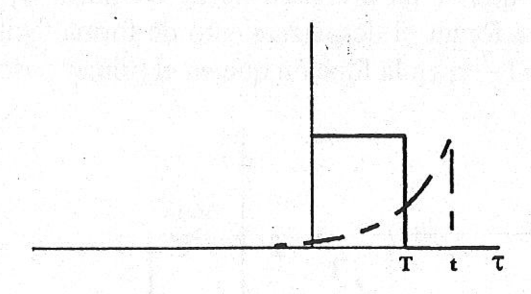
Segundo tramo.



0 ≤ t ≤ T; hay un solapamiento parcial, uno de los límites de la integral es siempre cero y el otro depende del desplazamiento t.

$$y(t) = \int_0^t \frac{1}{T} e^{-(t-\tau)/t_0} d\tau = \frac{t_0}{T}\left(1 - e^{-t/t_0}\right) \qquad 0 \le t \le T$$

Tercer tramo:



t ≥ T; hay un solapamiento en todo el pulso, los dos limites de la integral son constantes.

$$y(t) = \int_0^T \frac{1}{T} e^{-(t-\tau)/t_0} d\tau = \frac{t_0}{T}\left(e^{T/t_0} - 1\right) e^{-t/t_0} \qquad t \ge T$$

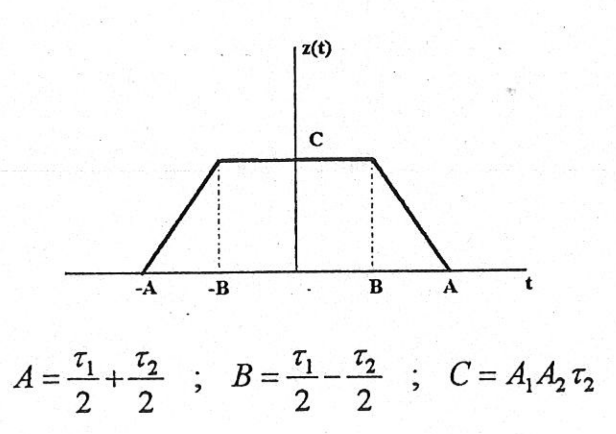
1.4.3. Ejemplo propuesto.

Calcular:

$$z(t) = x(t) * y(t)$$

$$x(t) = A_1 \Pi\left(\frac{t}{\tau_1}\right) \quad y(t) = A_2 \Pi\left(\frac{t}{\tau_2}\right) \qquad \tau_1 > \tau_2$$

Resultado:



$$A = \frac{\tau_1}{2} + \frac{\tau_2}{2} \quad ; \quad B = \frac{\tau_1}{2} - \frac{\tau_2}{2} \quad ; \quad C = A_1 A_2 \tau_2$$

1.5. Propiedades de los sistemas a partir de la respuesta impulsional.

Una vez definida la respuesta impulsional, las propiedades de los sistemas y de la convolución, hay tres propiedades de los sistemas que pueden reconocerse a partir de la respuesta impulsional. Queda presupuesto que en un sistema, para que exista respuesta impulsional, entendida como tal, el sistema tiene que ser lineal.

Invarianza temporal.

Un sistema será invariante en el tiempo si su respuesta impulsional sólo depende de la variable tiempo, no del instante de tiempo para el cual se defina, es decir, $h(t,t_0) \equiv h(t-t_0)$.

Causalidad.

Si se aplica la definición de causalidad al caso particular de una excitación $\delta(t)$, el sistema será causal si, $h(t)=0$ para $t < 0$.

Estabilidad.

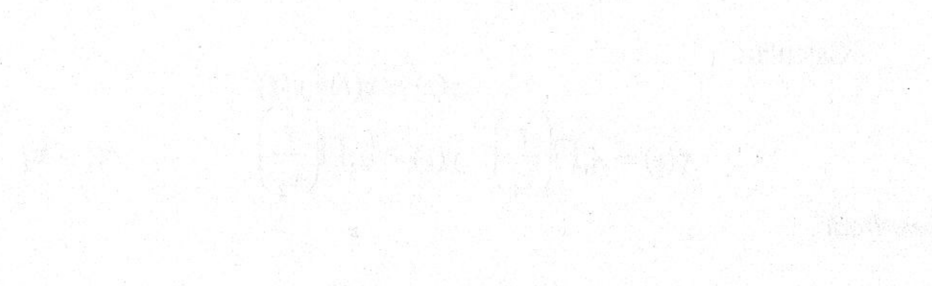
Si $|x(t)| < M$

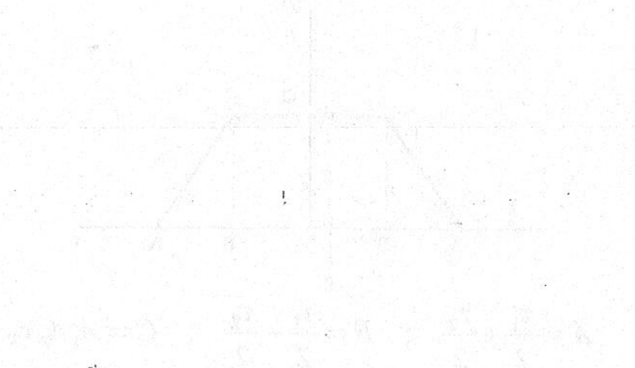
$$|y(t)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)||x(t-\tau)|d\tau < M\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau$$

Para que y(t) este acotada:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty$$

<u>La condición encontrada es suficiente y necesaria.</u>





1.8. Propiedades de los sistemas a partir de la respuesta impulsional

Una vez definida la respuesta impulsional, las propiedades de los sistemas y de la convolución, hay tres propiedades de los sistemas [illegible] a partir de la respuesta impulsional. [illegible]

Invariancia temporal.

[illegible]

Causalidad.

[illegible]

Estabilidad.

[illegible]

Para que $h(t)$ sea estable [illegible]

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$$

La condición encontrada es suficiente y necesaria.

2. Análisis de Fourier.

En el capítulo anterior se ha visto que si un sistema era lineal se podía calcular su respuesta a una excitación con una expresión matemática complicada, como suma de respuestas a señales que fueran más fáciles de tratar. En este capítulo se estudiará una forma sistemática de realizar esta descomposición, de forma que sea fácil tratar las señales y por supuesto los sistemas.

2.1. Series de Fourier.

Los Desarrollos en Serie de Fourier, no son más que la descomposición de una señal, que cumpla una serie de condiciones, en un sumatorio de señales ortogonales. Se denominan señales ortogonales aquellas que cumplen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)\,dt = 0 \text{ excepto si } y(t) = Kx(t)$$

En el caso de los Desarrollos en Serie de Fourier, la familia de señales ortogonales que se utilizarán serán: exponenciales complejas, o si se prefiere, senos y cosenos.

En general, para hacer una descomposición, no es necesario que las funciones ortogonales sean siempre exponenciales complejas, puede ser cualquier familia de funciones ortogonales. Más adelante se comprenderá la razón por la que se utilizan este tipo de funciones y no cualquier otra.

Las condiciones que tiene que cumplir una función matemática para poder ser aproximada por una Serie de Fourier, son:

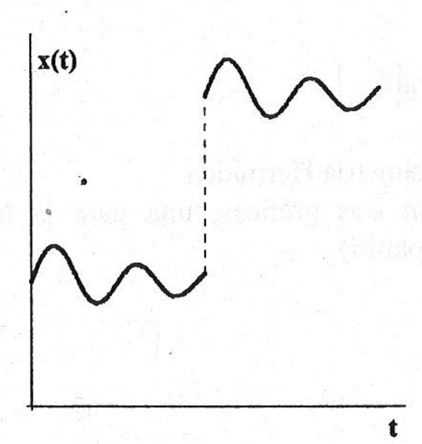
1) Ser periódica de periodo $T_0 = \dfrac{1}{f_0} = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$

$$x(t \pm mT_0) = x(t), \text{ para } \forall \text{ t, siendo m entero}$$

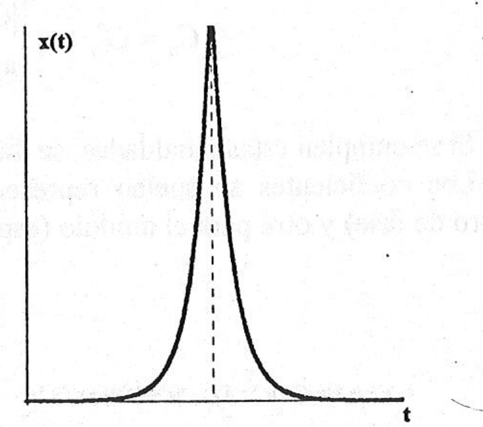
2) La función tiene que estar definida para todo t.

$$-\infty < t < \infty$$

3) Ser continua en $[0, T_0]$ o tener un número finito de discontinuidades de primera especie.



Discontinudad de primera especie



Discontinuidad de segunda especie

4) Tener un número finito de máximos y mínimos en $[0, T_0]$.

Si se cumplen todas estas condiciones se puede demostrar (por aproximación de funciones por mínimos cuadrados, con funciones ortogonales) que:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\right)$$

o utilizando las fórmulas de Euler:

$$\text{Formulas de Euler} \Rightarrow e^{\pm j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) \pm j \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

de forma más compacta:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \qquad \omega_0 = 2\pi f_0$$

Esto es lo se denomina Desarrollo en Serie de Fourier.

En procesado de señal, cada uno de los términos del sumatorio, recibe un nombre especial, dependiendo del valor de n.
El termino n=0, se llama valor medio o continua.
El termino n=1, se llama fundamental.
Los demás términos se llaman armónicos.

Los coeficientes del desarrollo se encontrarán con la expresión:

$$C_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

En general, los coeficientes C_n serán complejos, $C_n = |C_n| e^{j\arg[C_n]}$

El cálculo de los coeficientes del Desarrollo en Serie de Fourier admite bastantes simplificación, si se tiene en cuenta las características típicas de las funciones matemáticas que se utilizan en procesado para representar las señales.

-Si x(t) es real:

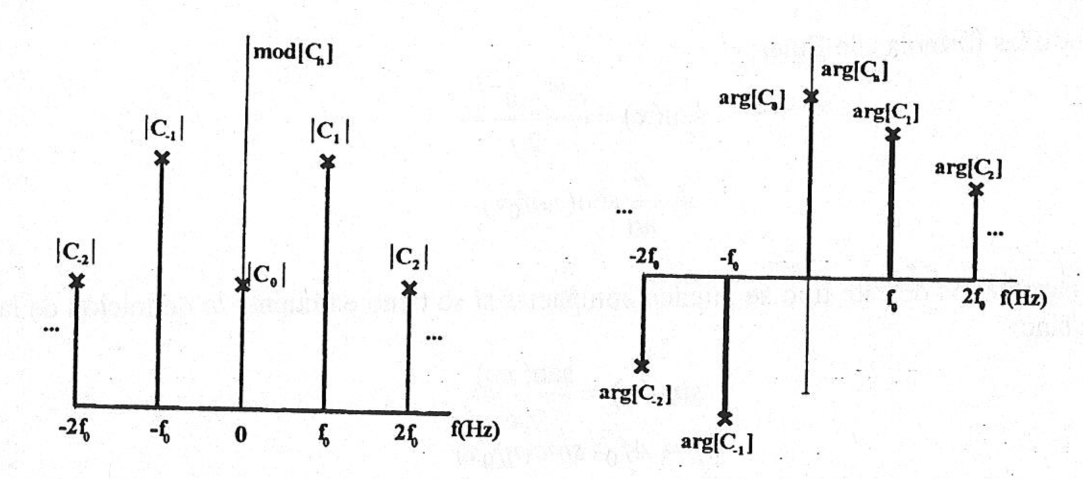
$$C_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \qquad C_{-n} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{jn\omega_0 t} dt$$

como x(t) es real:

$$C_n = C_{-n}^* \Rightarrow \begin{cases} |C_n| = |C_{-n}| \\ \arg[C_n] = -\arg[C_{-n}] \end{cases}$$

Si se cumplen estas igualdades, se dice que tiene simetría Hermítica.

Los coeficientes se suelen representar mediante dos gráficas, una para la fase (espectro de fase) y otra para el módulo (espectro de amplitud).



En las gráficas se puede observar que la representación, tanto del espectro de fase como del de amplitud, sólo tiene valores distintos de cero en determinados valores de frecuencia, cada uno de esos valores se le llama raya espectral. También se puede apreciar la situación de estas rayas espectrales, están equiespaciadas y situadas a múltiplos de la frecuencia fundamental f_0: 0, f_0, $2f_0$, $3f_0$, ..., lo que se ha denominado como armónicos.

Si x(t) es par (x(t)=x(-t)):
Los coeficiente C_n serán reales y, por tanto, su fase será 0° ó 180°.
La expresión que permite calcularlos se simplifica, siendo:

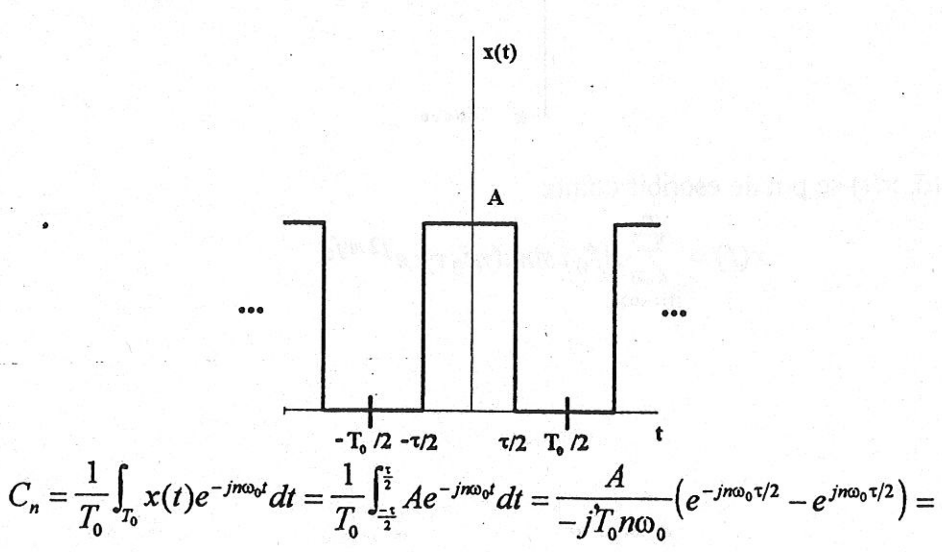
$$C_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) \bullet \cos(n\omega_0 t)dt$$

Si x(t) es impar (x(t)=-x(-t)):
Los coeficiente C_n serán imaginarios puros y, por tanto, su fase será 90° ó -90°.
La expresión que permite calcularlos se simplifica, siendo:

$$C_n = \frac{-j}{T_0}\int_{T_0} x(t) \bullet \mathrm{sen}(n\omega_0 t)dt$$

Para demostrar estas dos simplificaciones simplemente hay que utilizar las fórmulas de Euler, y aprovechar las simetrías del seno (impar) y el coseno (par).

2.1.1. Ejemplo: Cálculo del Desarrollo en Serie de Fourier .



$$C_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{\frac{-\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Ae^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{A}{-jT_0 n\omega_0}\left(e^{-jn\omega_0\tau/2} - e^{jn\omega_0\tau/2}\right) =$$

Utilizando las fórmulas de Euler:

$$\text{sen}(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

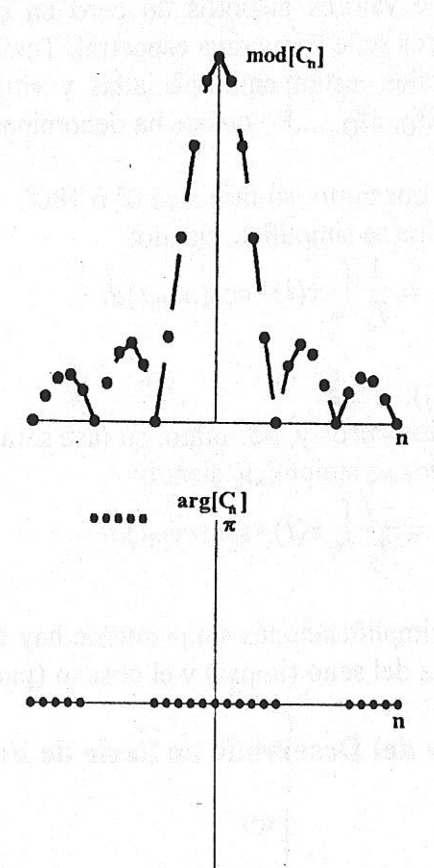
$$= \frac{A}{\pi n}\text{sen}(\pi n f_0 \tau)$$

Resultados de este tipo se pueden compactar si se tiene en cuenta la definición de la función sinc:

$$sinc(x) = \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x}$$

$$C_n = A f_0 \tau sinc(n f_0 \tau)$$

Si se representa gráficamente se tiene:

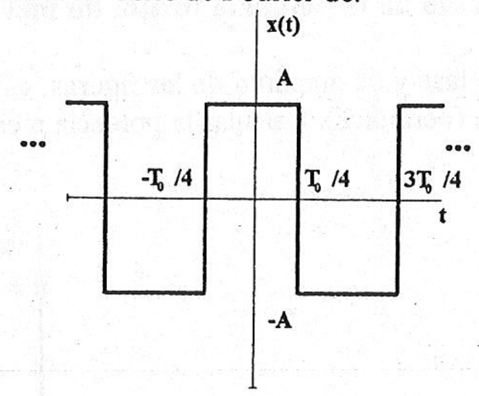


Por tanto, x(t) se puede escribir como:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A f_0 \tau sinc(n f_0 \tau) \cdot e^{j2\pi n f_0 t}$$

2.1.2. Ejemplo propuesto.

Encontrar el Desarrollo en Serie de Fourier de:



Nota: $e^{ja} \pm e^{jb} = e^{j\frac{a+b}{2}}\left[e^{j\frac{a-b}{2}} \pm e^{-j\frac{a-b}{2}}\right]$

Resultado:

$$C_n = \begin{cases} 0 & ,n = 0 \\ A\,sinc\left(\frac{n}{2}\right) & ,n\ impar \\ 0 & ,n\ par \end{cases}$$

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2C_n \cos(2\pi n f_0 t)$$

2.2. Teorema de Parseval.

Por definición, la potencia media de una señal periódica es:

$$P = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2\, dt$$

Desarrollando esta igualdad, teniendo en cuenta que la señal sobre la que se realiza el cálculo es periódica:

$$P = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)x^*(t)\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 t}\right]^* dt =$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^* e^{-j2\pi n f_0 t}\right] dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) C_n^* e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt =$$

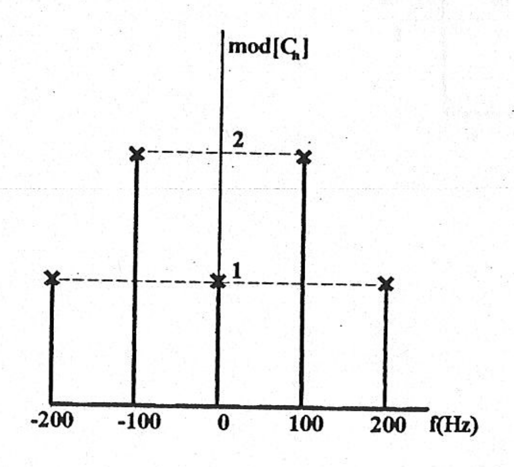
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^*\left[\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^* C_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$

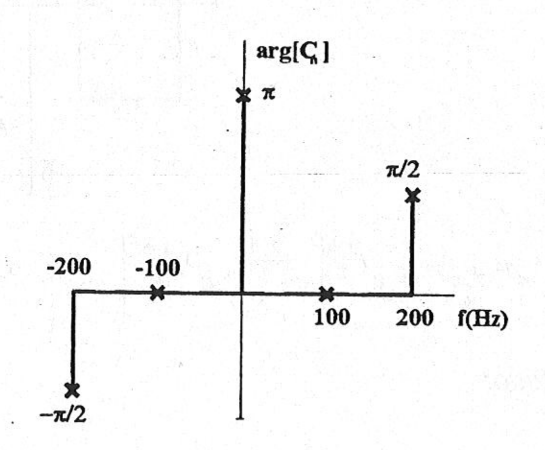
En definitiva, el teorema de Parseval proporciona una segunda forma de calcular la potencia media de una señal:

$$P = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$

2.2.1. Ejemplo: Cálculo de la potencia media de una señal.

Dados los espectros de fase y de amplitud de las figuras, calcular la expresión de la señal temporal correspondiente (periódica). Calcular la potencia media en los dos dominios, temporal y frecuencial.





$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \qquad \omega_0 = 2\pi f_0$$

$f_0 = 100\,Hz$
$C_0 = -1$
$C_1 = C_{-1} = 2$
$C_2 = j$
$C_{-2} = -j$

$$x(t) = -1 + 2e^{j2\pi f_0 t} + 2e^{-j2\pi f_0 t} + je^{j2\pi 2 f_0 t} - je^{-j2\pi 2 f_0 t} =$$
$$= -1 + 2(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}) + j(e^{j2\pi 2 f_0 t} - e^{-j2\pi 2 f_0 t})$$
$$x(t) = -1 + 2\cos(2\pi 100 t) - 2\,\text{sen}(2\pi 200 t)$$

Cálculo de la potencia media en el tiempo:

$$P = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2\, dt$$

Al ser un sumatorio de armónicos, la potencia media es la suma de potencias de cada uno de los armónicos (ortogonalidad).

$$\int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t)\,\text{sen}(n\omega_0 t)\,dt = 0 \qquad \forall\, m,n$$
$$\int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)\,dt = 0 \qquad \forall\, m \neq n$$
$$\int_0^{T_0} \text{sen}(m\omega_0 t)\,\text{sen}(n\omega_0 t)\,dt = 0 \qquad \forall\, m \neq n$$
$$\int_0^{T_0} \text{sen}^2(n\omega_0 t)\,dt = \int_0^{T_0} \cos^2(n\omega_0 t)\,dt = \frac{T_0}{2}$$
$$P(-1) = 1 \qquad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (-1)^2\, dt = 1$$

$$P(4\cos(2\pi 100t)) = 8 \qquad \frac{1}{T_0}16\int_0^{T_0}\cos^2(2\pi 100t)\,dt = \frac{1}{T_0}16\frac{T_0}{2}$$
$$P(2\,\text{sen}(2\pi 200t)) = 2 \qquad \frac{1}{T_0}4\int_0^{T_0}\text{sen}^2(2\pi 200t)\,dt = \frac{1}{T_0}4\frac{T_0}{2}$$
$$P = 1+8+2 = 11w$$

Cálculo de la potencia media sobre el espectro:

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_n|^2 = 1+2^2+2^2+1+1 = 11w$$

Evidentemente, el resultado es idéntico para los dos casos.

El teorema de Parseval no siempre es la mejor forma de calcular la potencia media de la señal, sino que simplemente es otra opción, depende de la señal se debe utilizar un método u otro, obiamente la que presente menor dificultad matemática.

2.3. Respuesta en régimen permanente sinusoidal.

Se ha visto como descomponer una señal periódica en un sumatorio de exponenciales complejas. En este apartado va a darse una justificación a este tipo de desarrollos.

Primeramente se verá como reacciona un sistema L.T.I. a una excitación del tipo exponencial compleja.

x(t) —— [h(t)] —— y(t)

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

La salida y(t) se encontrará realizando la convolución de la respuesta impulsional del sistema con la entrada:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0(t-\tau)}h(\tau)d\tau = e^{j\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega_0\tau}d\tau =$$
$$= e^{j\omega_0 t}H(j\omega_0) \qquad H(j\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega_0\tau}d\tau = cte$$

De este cálculo se pueden deducir una serie de particularidades de los sistemas L.T.I y las exponenciales complejas, también llamadas fasores.

- La exponencial compleja es una autofunción de la convolución. Una autofunción es una función que sobrevive a una operación, en este caso se tiene que después de realizar la convolución se tiene la misma exponencial que a la entrada, solamente afectada por un cambio de amplitud ($H(j\omega_0)$).

- Por otra parte, un sistema L.T.I. reacciona ante un fasor, simplemente cambiando la amplitud de este (amplitud que puede ser compleja, módulo y fase). En general, si se dispone de una entrada de la forma $x(t) = e^{j\omega t}$, donde ω puede ser cualquier pulsación, y se realiza la operación:

$$\frac{y(t)}{x(t)} = H(j\omega)$$

la expresión H(jω) representa como responde el sistema a cada pulsación en particular, a esta expresión se le llama función de transferencia del sistema. Por simplificar la notación, la función de transferencia del sistema, también llamada respuesta en frecuencia del sistema, se suele expresar como, H(f).

-Si se dispone de un sistema L.T.I., que se excita con una señal periódica, la cual admita un desarrollo en serie de la siguiente forma:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \qquad \omega_0 = 2\pi f_0$$

y se quiere conocer la salida, y(t), como el sistema es lineal se puede calcular la salida como suma de las respuestas del sistema a los diferentes fasores que componen la entrada:

$$y(t) = S\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n(t)\right] \Leftrightarrow y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(S\left[x_n(t)\right]\right)$$

en este caso particular:

$$y(t) = S\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}\right] \Leftrightarrow y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(S\left[C_n e^{jn\omega_0 t}\right]\right)$$

Como el sistema es lineal e invariante, la respuesta a cada una de las excitaciones se puede calcular como la convolución de la respuesta impulsional del sistema y el fasor correspondiente. La repuesta a un fasor ha sido calculada al principio de este apartado y era:

$$S\left[e^{j\omega_0 t}\right] = e^{j\omega_0 t} H(j\omega_0) \qquad H(j\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau = cte$$

Luego en el caso de una excitación periódica que admita desarrollo en serie de Fourier, la respuesta de un sistema L.T.I. se podrá calcular como:

$$y(t) = S\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}\right] \Leftrightarrow y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n H(nf_0) e^{jn\omega_0 t}$$

Por tanto, la respuesta de una señal periódica, o en general la respuesta a una señal compuesta de un sumatorio de fasores (el sumatorio de una serie de señales periódicas es una señal periódica), puede ser calculada como el sumatorio de los mismos fasores, sólo que cada uno de ellos afectado por una constante, $H(f_n)$, propia del sistema. Si el sistema no es L.T.I. este desarrollo no es cierto.

- Si el desarrollo anterior se aplica al cálculo de la potencia media de una señal, en general, compuesta de un sumatorio de fasores, la respuesta del sistema, será calculada como:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n H(nf_0) e^{jn\omega_0 t}$$

El teorema de Parseval decía que si se disponía de una señal periódica, se podía calcular la potencia media como:

$$P\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|C_n\right|^2$$

En este caso los coeficientes C_{yn} de la señal y(t), serían $C_n H(nf_0)$, por tanto, la potencia media de la señal y(t) sería:

$$P_{y(t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n H(nf_0)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 |H(nf_0)|^2$$

De este apartado se puede destacar la operación:

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

que se conoce como Transformada de Fourier.

2.4. Transformada de Fourier.

La Transformada de Fourier, X(f), de una señal de energía finita, extensible a señales de potencia media finita, (si se admite la existencia de Deltas de Dirac), está definida como:

$$\mathrm{F}\{x(t)\} = X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Puede verse que no es más que una Transformada de Laplace, bilateral, particularizada para S=jω. El hecho de definirse como bilateral, no es más que permitir que la señal esté definida desde -∞ y hasta ∞, es decir, no se tendrán en cuenta ninguna condición inicial, al contrario que sucedía en la Transformada de Laplace.

A su vez puede calcularse la Transformada Inversa de Fourier:

$$\mathrm{F}^{-1}\{X(f)\} = x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad \text{donde} \quad X(f) = F\{x(t)\}$$

Tanto la transformada, como la transformada inversa son relaciones biunívocas, es decir, que no hay dos señales que tengan la misma transformada, ni dos señales en dominio transformado que tengan la misma transformada inversa.

Una justificación del cálculo de esta transformada se puede buscar en las Series de Fourier. Una señal periódica, permitía un Desarrollo en Serie de Fourier de la siguiente forma:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \quad ; \quad \omega_0 = 2\pi f_0 \quad ; \quad C_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Se vio que las señales periódicas tenían rayas espectrales cada f_0 (f_0 era el inverso del periodo de la señal) y que cada raya espectral tenía amplitud C_n. Evidentemente, los Desarrollos en Serie de Fourier sólo son válidos para señales periódicas, pero si se dispone de una señal no periódica, se puede considerar que la señal tiene periodo infinito. Si se aplica esta consideración a un desarrollo en serie, como T_0 es infinito, f_0 es cero, por tanto, las rayas espectrales están infinitamente juntas. Dicho de otra manera, no se tiene una serie de coeficientes C_n, sino una función continua C(f). Si se aplica esto las expresiones de los Desarrollos en Serie de Fourier, se tendrá:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(\tau) \cdot e^{-jn\omega_0\tau} d\tau}_{C_n} \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

Si $T_0 \to \infty \Leftrightarrow f_0 \to 0$, los coeficientes del Desarrollo en Serie de Fourier pasan a ser una función continua:

$$x(t) = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_{T_0} x(\tau) e^{-jn\omega_0 \tau} d\tau}_{C(f)} e^{jn\omega_0 t}$$

Queda un sumatorio de términos infinitesimales, lo cual, no es más que la definición de integral:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right]}_{C(f) \equiv X(f)} e^{j\omega t} df$$

X(f) juega el papel de los coeficientes C_n de los Desarrollos en Serie de Fourier.

En señales periódicas: espectro discontinuo → sumatorio.

En señales no periódicas: espectro continuo → integral.

Una demostración más rigurosa de las expresión de la transformada inversa se puede realizar basandose en la siguiente igualdad:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega$$

En efecto:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega = \lim_{a \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} e^{j\omega t} d\omega = \lim_{a \to \infty} \frac{\text{sen}(at)}{\pi t} = \lim_{a \to \infty} a \frac{\text{sen}(at)}{\pi(at)} = \delta(t)$$

Para comprender mejor esta última igualdad se puede ver que la función, $\lim_{a \to \infty} a \frac{\text{sen}(at)}{\pi(at)}$, tiene toda su área concentrada en el origen de coordenadas y vale la unidad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}\, t}{\pi t} dt = 1$$

Si se tiene en cuenta esta igualdad:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)} d\omega \right] d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] d\omega =$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

De la misma forma que en las series, existen unas simetrías si x(t) cumple las siguientes condiciones:

-Si x(t) es real:

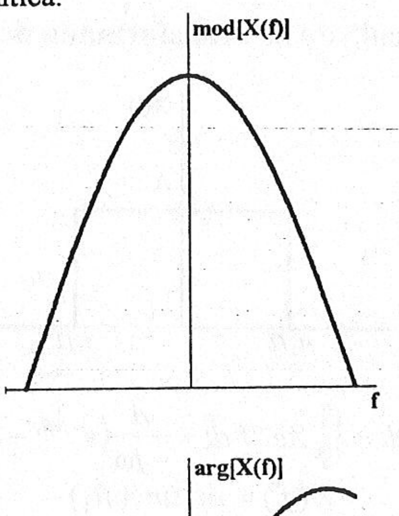
$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \qquad X(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt$$

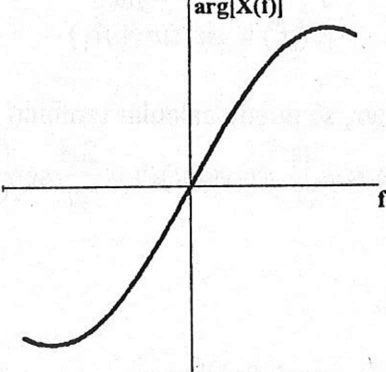
como x(t) es real:

$$X(f) = X^*(-f) \Rightarrow \begin{cases} |X(f)| = |X(-f)| \\ \arg[X(f)] = -\arg[X(-f)] \end{cases}$$

Una función que tenga estas características se dice que tiene simetría Hermítica.

La transformada se suele representar mediante dos gráficas, una para la fase (espectro de fase) y otra para el módulo (espectro de amplitud), donde se puede apreciar el significado de la simetría Hermítica.





-Si x(t) es par (x(t)=x(-t)):
La transformada será real y, por tanto, su fase será 0º ó 180º.
La expresión que permite calcularlos se simplifica, siendo:

$$X(f) = 2\int_0^{\infty} x(t)\cos(2\pi ft)dt$$

Si x(t) es impar (x(t)=-x(-t)):
La transformada será imaginaria pura y, por tanto, su fase será 90º ó -90º.
La expresión que permite calcularlos se simplifica, siendo:

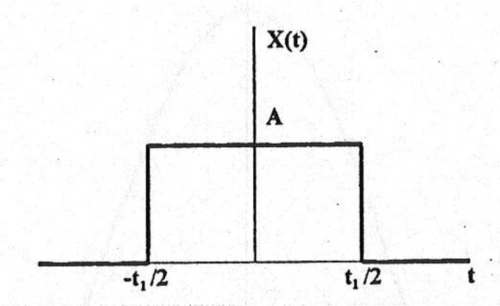
$$X(f) = -2j\int_0^{\infty} x(t)\,\mathrm{sen}(2\pi ft)dt$$

Para demostrar estas dos simplificaciones, simplemente hay que utilizar las fórmulas de Euler, y aprovechar las simetrías del seno (impar) y el coseno (par).

Otra característica que presentan las señales en el dominio transformado es que si se particulariza para f=0, el valor obtenido es el área de la señal de la cual se ha partido para obtener la transformada. Dicha característica permite solucionar integrales definidas cuyo integrando no tiene primitiva y sólo se podían resolver, aproximadamente, por métodos de cálculo numérico, por ejemplo, área de la función sinc.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt\Big|_{\omega=0} = X(0)$$

2.4.1. Ejemplo: Cálculo de la Transformada de Fourier de un pulso.



$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}}Ae^{-j\omega t}dt=\frac{A}{-j\omega}\left(e^{-j\pi f t_1}-e^{j\pi f t_1}\right)=\frac{A}{\pi f}\operatorname{sen}(\pi f t_1)$$
$$X(f)=At_1 sinc(ft_1)$$

Como la señal es real y par, se puede calcular también de la siguiente forma:

$$X(f)=\int_0^{\infty}x(t)\cos(\omega t)dt=\int_0^{\frac{t_1}{2}}A\cos(\omega t)dt=\frac{2A}{\omega}\operatorname{sen}\left(\frac{\omega t_1}{2}\right)=At_1 sinc(ft_1)$$

2.5. Teorema de Rayleigh.

La energía de una señal, E, por definición es:

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt$$

El teorema de Rayleigh, de la misma forma que el Parseval proporcionaba una segunda forma de calcular la potencia media de una señal periódica, proporciona otra forma de calcular la energía de una señal no periódica.

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt=\int_{-\infty}^{\infty}|X(f)|^2df$$

Demostración:

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)x^*(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty}X(f)e^{j\omega t}df\right]^*dt=$$

si se tiene encuenta que una integral no es más que un sumatorio de terminos infenitesimales, se puede cambiar el conjugado de la integral por el conjugado del integrando:

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty}X^*(f)e^{-j\omega t}df\right]dt=$$

cambiando de orden las integrales:

$$=\int_{-\infty}^{\infty}X^*(f)\left[\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt\right]df=\int_{-\infty}^{\infty}X^*(f)X(f)df=\int_{-\infty}^{\infty}|X(f)|^2df$$

Este teorema es muy parecido al de Parseval, pero existe la diferencia que aquí se calcula la energía y allí la potencia media. Es así, porque en señales periódicas la energía es siempre infinita y por tanto es un dato que no aporta información, mientras, que en señales de energía finita, la potencia media es siempre cero y tampoco da ninguna información.

2.5.1. Sentido físico de $|X(f)|^2$.

A partir del teorema de Rayleigh, se puede dar un sentido a la expresión $|X(f)|^2$, es la forma como está repartida la energía de una señal, en función de la frecuencia, por eso se suele llamar Densidad Espectral de Energía. De la misma forma cuando se hable de una distribución de potencia en el dominio de la frecuencia, se le llamará Densidad Espectral de Potencia (esta denominación se utilizará cuando se hagan cálculos sobre señales de potencia media finita no periódicas).

2.6. Teoremas de la Transformada de Fourier.

Un par transformado se suele representar por:

$$x(t) \leftrightarrow X(f)$$

Para desarrollar y demostrar algunos de los teoremas, se seguirá siempre la nomenclatura:

$$F\{x(t)\} = X(f) \qquad \text{y} \qquad F^{-1}\{X(f)\} = x(t)$$

2.6.1. Linealidad.

$$\alpha x(t) + \beta y(t) \leftrightarrow \alpha X(f) + \beta Y(f)$$

Combinaciones en el dominio del tiempo se convierten en combinaciones en dominio de la frecuencia y viceversa.

Demostración

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\alpha x(t) + \beta y(t)) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha x(t) e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \beta y(t) e^{-j\omega t} dt = \alpha X(f) + \beta Y(f)$$

2.6.2. Desplazamiento en el tiempo.

$$x(t - t_0) \leftrightarrow X(f) e^{-j\omega t_0}$$

Demostración:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t') e^{-j\omega (t' + t_0)} dt' = X(f) e^{-j\omega t_0}$$

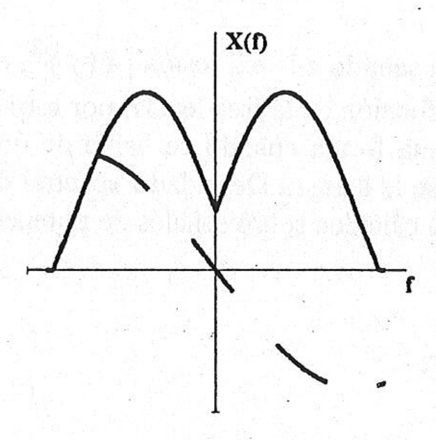
$$t' = t - t_0$$

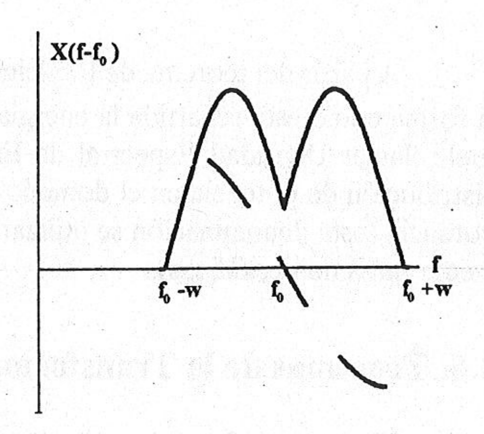
Un retardo representa una variación lineal de la fase.

2.6.3. Desplazamiento en frecuencia.

$$x(t)e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow X(f+f_0)$$
$$x(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X(f-f_0)$$

Gráficamente representa:





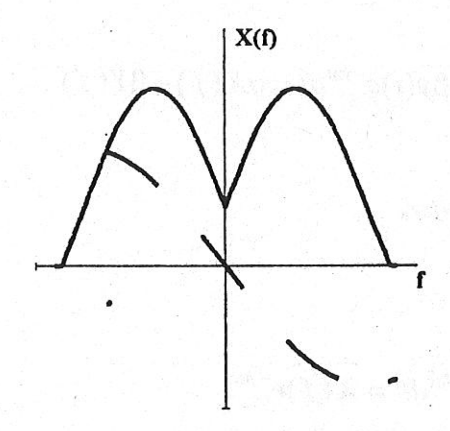
Demostración:

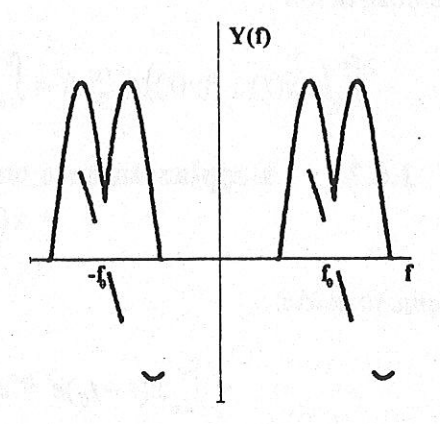
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(\omega+\omega_0)t}dt = X(f+f_0)$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt = X(f-f_0)$$

2.6.4. Corolario: Teorema de la Modulación.

La propiedad anterior es muy matemática, puesto que no existen señales como las exponenciales complejas., pero si que existen señales tipo senos y cosenos, que con las fórmulas de Euler se puede descomponer en exponenciales complejas.

$$x(t)\cos(\omega_0 t+\theta) = x(t)\frac{e^{j(\omega_0 t+\theta)}+e^{-j(\omega_0 t+\theta)}}{2} \leftrightarrow \frac{1}{2}\left(e^{j\theta}X(f-f_0)+e^{-j\theta}X(f+f_0)\right)$$





$$Y(f) = F\{y(t)\} = F\{x(t)\cos(\omega_0 t)\}$$

Con la multiplicación del espectro de una señal por un coseno o un seno, se puede trasladarlo al margen de frecuencias que uno desee.

2.6.5. Cambio de escala.

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

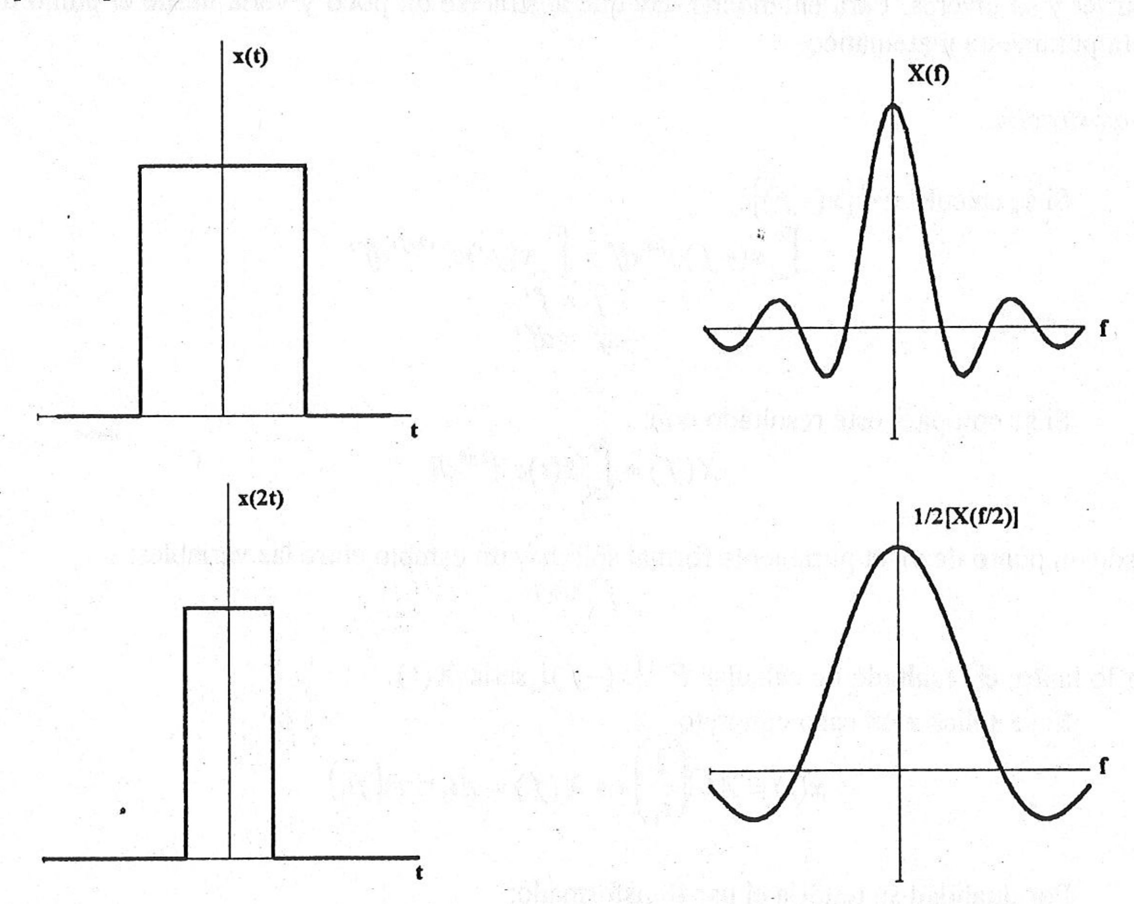
Demostración:

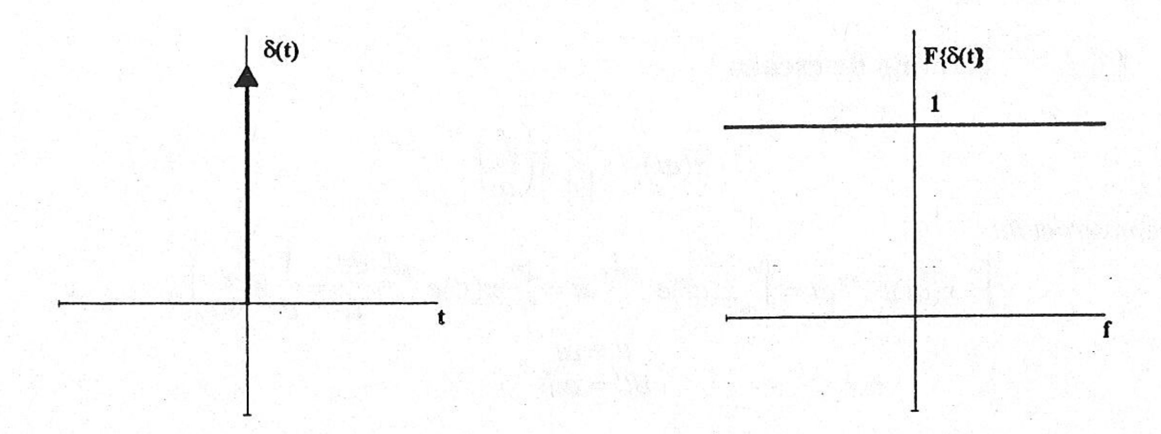
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-j\omega\frac{t}{a}a}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t')e^{-j\omega\frac{t'}{a}}\frac{dt'}{a} = \frac{1}{a}X\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$t' = at$$
$$dt' = adt$$

El valor absoluto aparece debido a que valores negativos de la constante, provocarían cambios en los limites de integración, que al volver a su posición original cancelarían el signo de la constante.

Una interpretación de las consecuencias de esta propiedad sobre las señales es que cuanto más se comprima una señal, los cambios más bruscos se harán, y esto a su vez provocará tener un espectro más ancho. El caso extremo sería comprimir una señal hasta tener una Delta de Dirac, que siendo consecuente con esta propiedad, tendría que tener un espectro plano, más adelante se verá que esto, evidentemente, es así.





2.6.6. Dualidad.

$$x(t) \leftrightarrow X(f)$$
$$X(t) \leftrightarrow x(-f)$$

La dualidad es una propiedad cuya utilidad se encontrará solamente en el cálculo de transformadas. Dicha propiedad se basa en el parecido que existe entre la Transformada de Fourier y su inversa. Para entenderla hay que abstraerse un poco y verla desde el punto de vista puramente matemático.

Demostración:

Si se calcula $F^{-1}\{x(-f)\}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(-f)e^{j\omega t}df = \int_{-\infty}^{\infty} x(f')e^{-j2\pi f't}df'$$
$$-f = f'$$
$$-df = df'$$

Si se compara este resultado con:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

desde un punto de vista puramente formal sólo hay un cambio entre las variables:

$$f' \leftrightarrow t$$

por lo tanto, el resultado de calcular $F^{-1}\{x(-f)\}$,sería X(t).

Si se aplica a un caso concreto

$$x(t) = A\Pi\left(\frac{t}{t_1}\right) \leftrightarrow X(f) = At_1 \operatorname{sinc}(ft_1)$$

Por dualidad se tendría el par transformado:

$$X(t) = At_1 \operatorname{sinc}(tt_1) \leftrightarrow x(f) = A\Pi\left(\frac{-f}{t_1}\right)$$

En este caso, y dado que el pulso es una función par, x(f) se puede expresar como:

$$x(f) = A\Pi\left(\frac{f}{t_1}\right)$$

2.6.7. Diferenciación.

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega X(f)$$
$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n X(f)$$

La propiedad de la diferenciación sólo tiene sentido utilizarla si la función derivada de x(t) existe.
Demostración:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df\right] = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\left(\frac{d}{dt}e^{j2\pi ft}\right)df = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)j2\pi f e^{j2\pi ft}df$$

Según la definición de Transformada de Fourier, por comparación:

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow X(f)j2\pi f$$

Derivando n veces se llega al segundo par transformado.

2.6.8. Teorema de la convolución.

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(f)Y(f)$$
$$x(t)y(t) \leftrightarrow X(f) * Y(f)$$

Demostración:

La primera demostración:

$$F\{x(t) * y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau\right]e^{-j2\pi ft}dt =$$

cambiando el orden de integración:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t-\tau)e^{-j2\pi ft}dt\right]}_{Y(f)e^{-j2\pi f\tau}}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)Y(f)e^{-j2\pi f\tau}d\tau = X(f) \bullet Y(f)$$

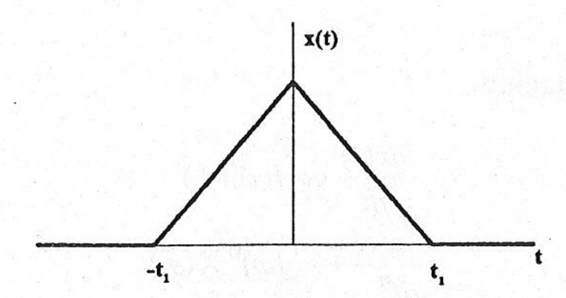
La segunda demostración:

$$F\{x(t) \bullet y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty} Y(f')e^{j2\pi f't}df'\right]e^{-j2\pi ft}dt =$$

cambiando el orden de integración:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} Y(f')\underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi(f-f')t}dt\right]}_{X(f-f')}df' = \int_{-\infty}^{\infty} Y(f')X(f-f')df' = Y(f) * X(f)$$

Ejemplo del teorema de la convolución.



Si se calcula directamente el espectro mediante la Transformada de Fourier:

$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j2\pi ft}dt=\int_{-t_1}^{0}\frac{A}{t_1}(t+t_1)e^{-j2\pi ft}dt+\int_{0}^{t_1}\frac{-A}{t_1}(t-t_1)e^{-j2\pi ft}dt$$

o. aprovechando que la señal es par:

$$X(f)=2\int_{0}^{\infty}x(t)\cos(2\pi ft)dt=2\int_{0}^{t_1}\frac{-A}{t_1}(t-t_1)\cos(2\pi ft)dt=$$

$$=\frac{-2A}{t_1}\left[\int_{0}^{t_1}t\cos(2\pi ft)dt-t_1\int_{0}^{t_1}\cos(2\pi ft)dt\right]=$$

El primer termino es una integral que hay resolver por partes, mientras que el segundo termino es una integral inmediata. El resultado de la integral por partes es muy conocido, es:

$$\int x\cos(x)dx=\cos(x)+x\,\text{sen}(x)$$

El resultado es:

$$X(f)=At_1\,\text{sinc}^2(ft_1)$$

Este proceso como se ve es largo y laborioso. Sin embargo, existe una forma más fácil, que es utilizando el teorema de la convolución:

$$A^2t_1\bigwedge\left(\frac{t}{t_1}\right)=A\Pi\left(\frac{t}{t_1}\right)*A\Pi\left(\frac{t}{t_1}\right)\Leftrightarrow u(t)=v(t)*v(t)$$

Cálculo realizado en 1.4.3 para el caso A=B y $\tau_1=\tau_2$.

Como la Transformada de Fourier de un pulso ha sido calculada antes y era:

$$V(f)=At_1\,\text{sinc}(ft_1)$$

$$U(f)=V(f)V(f)=A^2t_1^2\,\text{sinc}^2(ft_1)$$

Lo se tenía es una triángulo de amplitud A, por tanto:

$$X(f)=\frac{U(f)}{At_1}=At_1\,\text{sinc}^2(ft_1)$$

2.6.9. Transformada de Fourier de δ(t) y δ(f).

$$F\{\delta(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j2\pi ft}dt=1$$

Recuerde la propiedad de la Delta de Dirac:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)x(t)dt=x(0)$$

por tanto:

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

Análogamente:

$$F^{-1}\{\delta(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f) e^{j2\pi ft} df = 1$$
$$1 \leftrightarrow \delta(f)$$

Evidentemente, se puede utilizar la propiedad de la linealidad para encontrar los pares transformados:

$$A\,\delta(t) \leftrightarrow A$$
$$A \leftrightarrow A\,\delta(f)$$

2.6.10. Corolario: Transformada una señal periódica.

Partiendo del par transformado:

$$A \leftrightarrow A\,\delta(f)$$

y utilizando el teorema de desplazamiento en frecuencia:

$$Ae^{j\omega_0 t} \leftrightarrow A\,\delta(f - f_0)$$

Ahora, recurriendo a las fórmulas de Euler y al teorema de la linealidad se puede encontrar el par transformado:

$$A\cos(\omega_0 t + \theta) \leftrightarrow \frac{A}{2}\left(e^{j\theta}\delta(f - f_0) + e^{-j\theta}\delta(f + f_0)\right)$$

Este par transformado es muy importante porque permite encontrar la transformada de Fourier de una señal periódica. Una señal periódica siempre se puede escribir en forma de su desarrollo en serie:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \qquad \omega_0 = 2\pi f_0$$

y teniendo en cuenta el par transformado descrito arriba:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(f - nf_0)$$

Si, el Desarrollo en Serie de Fourier estuviera en forma de senos y coseno, se utilizaría el otro par transformado.

Es importante darse cuenta que se realiza la Transformada de Fourier sobre el desarrollo en serie y no sobre la señal periódica inicial.

2.6.11. Teorema integral.

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow X(f)\dot{U}(f)$$

Demostración:

Siendo x(t)∗δ(t)=x(t) y:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}\left(u(t)\right)$$

x(t) se puede expresar de la siguiente forma:

$$x(t) = x(t) * \frac{d}{dt}\left(u(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(x(t) * u(t)\right)$$

Integrando a ambos lados de la igualdad:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = x(t) * u(t)$$

con lo que:

$$F\left\{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right\} = F\{x(t) * u(t)\} = X(f)U(f)$$

Más adelante se calculará la Transformada de Fourier de un escalón, aquí de todas formas se utilizara la transformada del escalón porque normalmente este teorema viene escrito de esa forma:

$$F\{u(t)\} = U(f) = \frac{\delta(f)}{2} + \frac{1}{j2\pi f}$$

con lo que el par transformado queda:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{X(0)\delta(f)}{2} + \frac{X(f)}{j2\pi f}$$

2.6.12. Ejemplos: Utilización de los teoremas de la Transformada de Fourier.

Encontrar $F\{e^{-t}u(t)\}$

$$X(f) = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-j2\pi f t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(1+j2\pi f)t} dt = \frac{-1}{1+j2\pi f} e^{-(1+j2\pi t)t}\Bigg]_0^{\infty} = \frac{1}{1+j2\pi f}$$

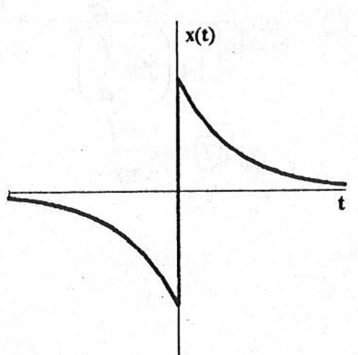
Encontrar $F\{e^{-|t|}\}$

$$X(f) = 2\int_0^{\infty} e^{-t}\cos(2\pi f t)dt = 2\frac{e^{-t}\left(-\cos(2\pi f t) + 2\pi f\,\mathrm{sen}(2\pi f t)\right)}{1+\left(2\pi f\right)^2}\Bigg]_0^{\infty} = \frac{2}{1+\left(2\pi f\right)^2}$$

Encontrar $F\{e^{-|t|}\,\mathrm{sgn}(t)\}$

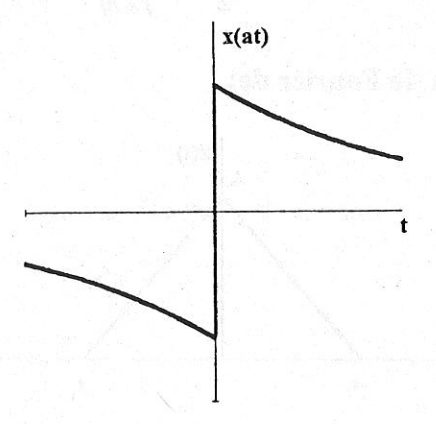
Como se puede ver en la figura,la transformada que se pide calcular es de una función impar, y por tanto se puede utilizar la simplificación calculada para este caso. También se podría descomponer en dos transformadas, una para la parte negativa del eje de tiempos y la otra para la parte positiva, ésta última ya ha sido calculada al comienzo de este apartado, por tanto, solamente quedaría por calcular, la transformada para el eje negativo de

tiempos. Aquí se a decidido utilizar la característica de función impar para encontrar la transformada propuesta.



$$X(f) = -j2\int_0^{\infty} e^{-t}\,\mathrm{sen}(2\pi ft)dt = -2j\left.\frac{e^{-t}\left(-\mathrm{sen}(2\pi ft) - 2\pi f\cos(2\pi ft)\right)}{1+(2\pi f)^2}\right]_0^{\infty} = \frac{-j4\pi f}{1+(2\pi f)^2}$$

Encontrar $F\{e^{-|at|}\,\mathrm{sgn}(at)\}$

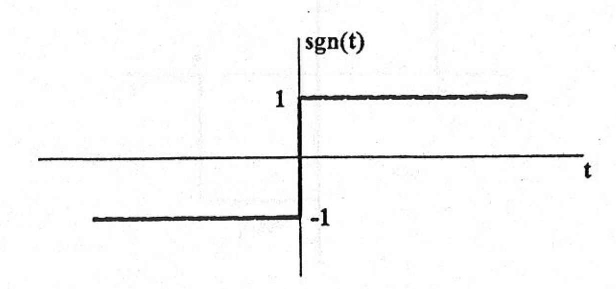


Por el teorema del cambio de escala:

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}X\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$X(f) = \frac{1}{|a|}\frac{-j4\pi\frac{f}{a}}{1+\left(2\pi\frac{f}{a}\right)^2}$$

Encontrar $F\{\mathrm{sgn}(t)\}$



Si la función anterior se lleva al limite cuando a tiende a 0, se tiene la función signo, por tanto, si se lleva al limite su transformada, se tendrá la trasformada de la función sgn(t).

$$X(f)=\lim_{a\to 0}\frac{1}{|a|}\frac{-j4\pi\frac{f}{a}}{1+\left(2\pi\frac{f}{a}\right)^2}=\frac{1}{j\pi f}$$

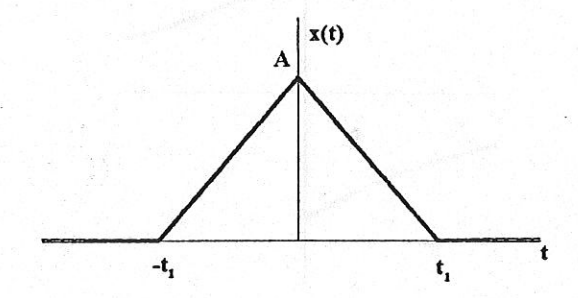
$$\operatorname{sgn}(t)\leftrightarrow\frac{-j}{\pi f}$$

Encontrar $F\{u(t)\}$

$$\frac{1}{2}F\{1+\operatorname{sgn}(t)\}=\frac{1}{2}\left[\delta(f)+\frac{1}{j\pi f}\right]=\frac{\delta(f)}{2}+\frac{1}{j2\pi f}$$

$$u(t)\leftrightarrow\frac{\delta(f)}{2}+\frac{1}{j2\pi f}$$

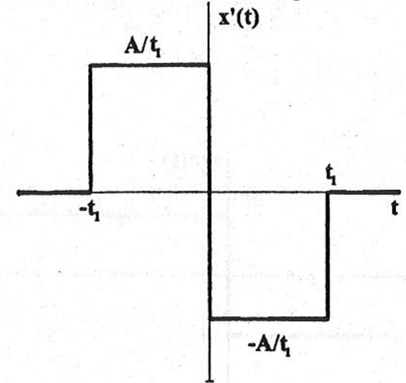
Encontrar la Transformada de Fourier de:



Esta transformada ha sido encontrada antes, ahora se calculará utilizando el teorema integral:

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}\frac{d}{dt}x(\tau)d\tau=x(t)$$

de esta forma se calculará primero la transformada de la derivada de x(t), que es más fácil de calcular, y luego, se aplicará el teorema de la integral.



$$F\{x(t)\}=\frac{1}{t_1}\left[\frac{X_{a1}(0)\delta(f)}{2}+\frac{X_{a1}(f)}{j2\pi f}+\frac{X_{a2}(0)\delta(f)}{2}+\frac{X_{a2}(f)}{j2\pi f}\right]$$

$$x_{a1}(t) = A\prod\left(\frac{t+\frac{t_1}{2}}{t_1}\right) \leftrightarrow X_{a1}(f) = At_1 \operatorname{sinc}(ft_1)e^{j2\pi f t_1/2}$$

$$x_{a2}(t) = -A\prod\left(\frac{t-\frac{t_1}{2}}{t_1}\right) \leftrightarrow X_{a2}(f) = -At_1 \operatorname{sinc}(ft_1)e^{-j2\pi f t_1/2}$$

$$X_{a1}(0) = At_1$$
$$X_{a2}(0) = -At_1$$

$$X(f) = \frac{1}{j2\pi f t_1}\left[At_1 \operatorname{sinc}(ft_1)e^{j2\pi f t_1/2} - At_1 \operatorname{sinc}(ft_1)e^{-j2\pi f t_1/2}\right] =$$

$$= \frac{A}{j2\pi f} sinc(ft_1)\left(2j \operatorname{sen}(\pi f t_1)\right) = At_1 sinc^2(ft_1)$$

que evidentemente es el mismo resultado obtenido anteriormente.

Encontrar $F^{-1}\left\{\frac{1}{(\alpha + j2\pi f)^n}\right\}$ con $\alpha > 0$

Se conoce el par transformado:

$$F\{e^{-t}u(t)\}$$

$$e^{-t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{1+j2\pi f}$$

así mismo, se disponen del teorema del cambio de escala, que si se aplica a este par transformado:

$$e^{-\alpha t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha}\frac{1}{1+j2\pi\frac{f}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$$

Por otra parte:

$$\frac{d^n}{dt^n}x(t) \leftrightarrow (j2\pi f)^n X(f)$$

y por el teorema de la dualidad:

$$\frac{d^n}{df^n}X(f) \leftrightarrow (-j2\pi t)^n x(t)$$

Si se calcula la derivada enésima de:

$$\frac{1}{(\alpha + j2\pi f)}$$

$$\frac{d^n}{df^n}\frac{1}{(\alpha + j2\pi f)} = \frac{n!(-j2\pi)^n}{(\alpha + j2\pi f)^{n+1}}$$

Despejando la parte que interesa:

$$\frac{1}{(\alpha+j2\pi f)^n}=\frac{d^{n-1}}{df^{n-1}}\left[\frac{1}{(\alpha+j2\pi f)}\right]\frac{1}{(n-1)!(-j2\pi)^{n-1}}$$

de esta forma, se puede calcular la antitransformada pedida aplicando el teorema de la derivación y él de dualidad, sobre una transformada inversa conocida:

$$F^{-1}\left\{\frac{1}{(\alpha+j2\pi f)^n}\right\}=(-j2\pi t)^{n-1}e^{-\alpha t}u(t)\frac{1}{(n-1)!(-j2\pi)^{n-1}}=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(t)$$

Encontrar $F\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\right\}$ (tren de deltas).

Al ser periódica, encuentro el desarrollo en serie:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{j2\pi nf_0 t}\qquad f_0=\frac{1}{T}$$

Calculando los coeficientes:

$$C_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta(t)e^{-j2\pi nf_0 t}dt=\frac{1}{T}$$

Por tanto, se puede escribir el tren de deltas como:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}e^{j2\pi nf_0 t}=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{j2\pi nf_0 t}$$

Como se conoce el par transformado:

$$Ae^{j(\omega_0 t+\theta)}\leftrightarrow Ae^{j\theta}\delta(f-f_0)$$

$$F\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\right\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}\delta(f-nf_0)=f_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-nf_0)$$

Encontrar $F\left\{\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}x(t'-t'')y(t'')dt''dt'\right\}$ siendo x(t) e y(t), funciones pares.

$$z(t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}x(t'-t'')y(t'')dt''dt'=\int_0^t x(t')*y(t')dt'=\int_{-\infty}^{t}x(t')*y(t')dt'-\underbrace{\int_{-\infty}^{0}x(t')*y(t')dt'}_{Cte}$$

Por tanto:

$$Z(f)=\frac{X(f)Y(f)}{j\omega}+\frac{X(0)Y(0)}{2}\delta(f)-Cte\,\delta(f)$$

Para calcular la constante:

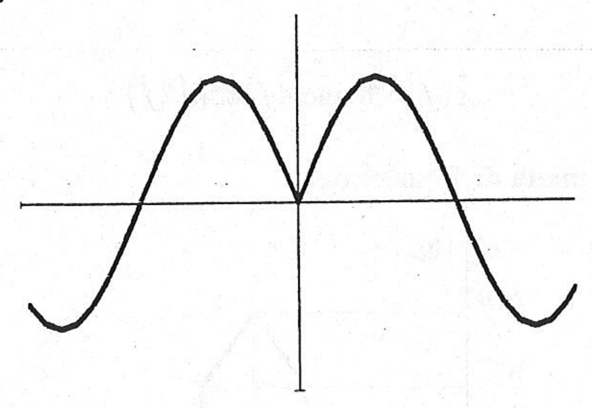
$$\int_0^{\infty}x(t')*y(t')dt'=\int_{-\infty}^{0}x(t')*y(t')dt'=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}x(t')*y(t')dt'=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}x(t')*y(t')e^{-j2\pi ft'}dt'\Big|_{f=0}=$$

$$=\frac{X(0)Y(0)}{2}=Cte$$

Si se sustituye la Cte. por el valor conseguido:

$$F\left\{\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} x(t'-t'')y(t'')dt''dt'\right\} = \frac{X(f)Y(f)}{j\omega} + \frac{X(0)Y(0)}{2}\delta(f) - \frac{X(0)Y(0)}{2}\delta(f) =$$
$$= \frac{X(f)Y(f)}{j\omega}$$

Encontrar $F\{\text{sen}(|t|)\}$.



Para encontrar esta transformada se puede descomponer en:

$$F\{\text{sen}(|t|)\} = F\{\text{sen}(t)\,\text{sgn}(t)\} = F\{\text{sen}(t)\} * F\{\text{sgn}(t)\}$$

La transformada de la función signo ya fue encontrada, y es:

$$\text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{-j}{\pi f}$$

Para encontrar la transformada de un seno, se debe utilizar las fórmulas de Euler:

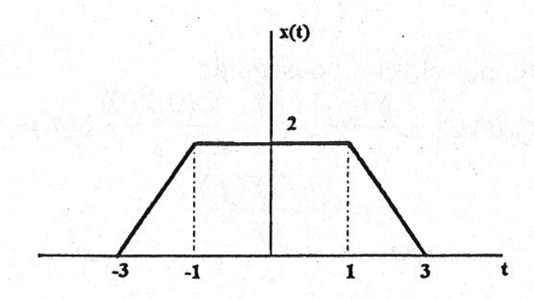
$$F\{\text{sen}(t)\} = F\left\{\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}\right\} = \frac{\delta\left(f-\frac{1}{2\pi}\right)-\delta\left(f+\frac{1}{2\pi}\right)}{2j}$$

Una vez encontrados los dos términos sólo queda realizar la convolución:

$$F\{\text{sen}(|t|)\} = \frac{\delta\left(f-\frac{1}{2\pi}\right)-\delta\left(f+\frac{1}{2\pi}\right)}{2j} * \frac{-j}{\pi f} = \frac{1}{2j}\left[\delta\left(f-\frac{1}{2\pi}\right) * \frac{-j}{\pi f} - \delta\left(f+\frac{1}{2\pi}\right) * \frac{-j}{\pi f}\right] =$$
$$= \frac{-1}{2\pi\left(f-\frac{1}{2\pi}\right)} + \frac{1}{2\pi\left(f+\frac{1}{2\pi}\right)} = \frac{2}{1-(2\pi f)^2}$$

2.6.13. Ejemplos propuestos.

Encontrar la Transformada de Fourier de :

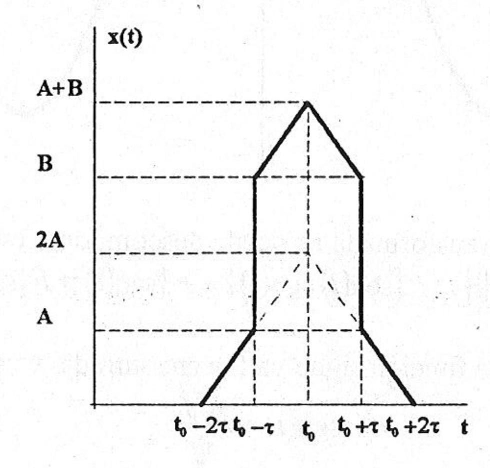


Nota: Encontrar la Transfomada de Fourier de la derivada de x(t) y aplicar el teorema integral. También se puede descomponer la figura como resta de dos triángulos.

Resultado:

$$X(f) = 8\,\text{sinc}(4f)\,\text{sinc}(2f)$$

Encontrar la Transformada de Fourier de:

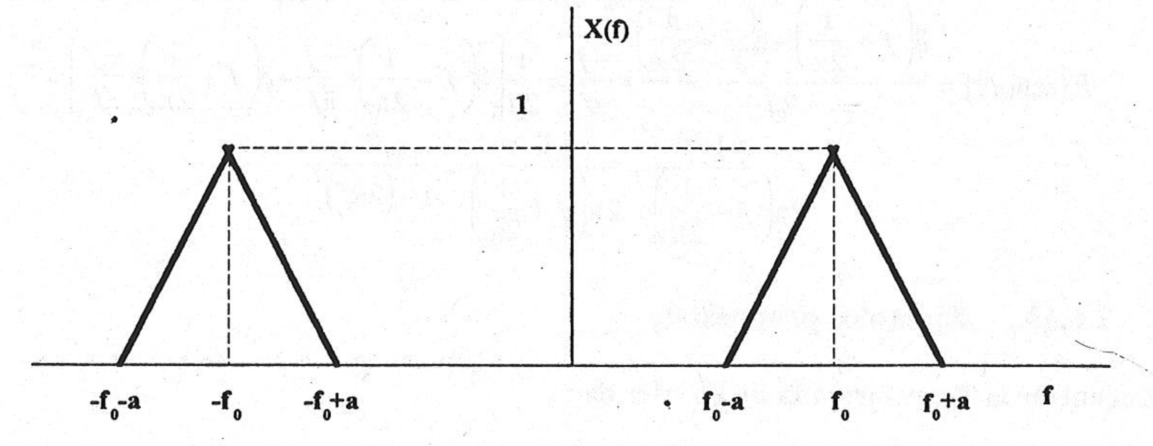


Nota: Descomponer la figura en otras más sencillas y utilizar linealidad.

Resultado:

$$X(f) = 2\tau\,\text{sinc}(2f\tau)e^{-j2\pi f t_0}\left(2A\,\text{sinc}(2f\tau) + B - A\right)$$

Encontrar la Transformada Inversa de Fourier de:



Nota: Aplicar dualidad y desplazamiento en frecuencia.

Resultado:

$$x(t) = 2a\,\mathrm{sinc}^2(at)\cdot\cos(2\pi f_0 t)$$

2.7. Función de transferencia.

Si se recuerda la definición de respuesta impulsional, en sistemas lineales invariantes: la respuesta impulsional es la respuesta al sistema cuando la excitación es una Delta de Dirac.

x(t) → h(t) → y(t)

$$x(t) = \delta(t) \leftrightarrow y(t) = h(t)$$

y la relación entre la entrada y la salida para cualquier excitación:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Ahora, si se realiza la Transformada de Fourier queda:

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

De esta igualdad ya se vio la expresión H(f), que es la función de transferencia del sistema o la respuesta en frecuencia del sistema.

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

Esta función de transferencia no es nada más que la Transformada de Fourier de la respuesta impulsional. Esto permitirá encontrar la respuesta de un sistema a cualquier señal de entrada, siempre que el sistema sea lineal e invariante y que la señal sea de potencia media finita o de energía finita, o sea, que tenga Transformada de Fourier. La respuesta se puede encontrar como la multiplicación de la respuesta en frecuencia del sistema por la transformada de la señal de excitación y no con la convolución, que es una operación complicada y laboriosa de realizar.

A su vez, se puede presentar la relación entrada-salida de otra forma:

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

que permite el diseño de la función de transferencia sabiendo la entrada que se dispone y la salida solicitada. Este cálculo puede llevar a errores, puesto que la H(f) encontrada puede no ser causal o físicamente realizable. Incluso puede darse el caso que H(f) no tenga transformada inversa, puesto que esta función se ha hallado dividiendo otras dos y no como

transformada de otra función, lo que por ser la Transformada de Fourier una relación biunívoca aseguraría la existencia de la transformada inversa.

De la misma forma que en señales periódicas se podía calcular la potencia media a la salida de una sistema L.T.I. conociendo el desarrollo en serie de la señal de entrada y aplicando el teorema de Parseval. Aquí se calcularán energías y se utilizará el teorema de Rayleigh, él cual decía:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

Si se aplica este teorema a la señal de salida de un sistema, y(t):

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 |H(f)|^2 df$$

por comparación, la densidades de espectrales de energía tanto, a la entrada como a la salida del sistema serán:

$$|X(f)|^2$$

$$|Y(f)|^2 = |X(f)|^2 |H(f)|^2$$

No hay que olvidar que de todo este desarrollo las señales que se pueden consideran reales, en el sentido que existen o pueden existir en el mundo físico, son las señales temporales, x(t), y(t) y h(t), el dominio transformado, es decir, el dominio de la frecuencia, sólo es un paso intermedio, puramente matemático, que se utiliza para resolver más fácilmente este tipo de problemas.

2.7.1. Formas básicas de interconectar sistemas L.T.I.

En este apartado se calculará la función de transferencia de un sistema creado por conexión de varios subsistemas. Esta forma de análisis es importantes porque, en sistemas complicados, donde se debe realizar un estudio global, es necesario descomponer el sistema en subsistemas más pequeños, que puedan ser analizados o diseñados más fácilmente y luego interconectarlos, obteniendo el sistema completo.

Las formas más usuales de interconectar sistemas son:

En cascada:

x(t) — $H_1(f)$ — v(t) — $H_2(f)$ — y(t)

Si se conectan en cascada, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} v(t) = x(t) * h_1(t) \\ y(t) = v(t) * h_2(t) \end{array}\right\} y(t) = \left(x(t) * h_1(t)\right) * h_2(t)$$

Si se realiza la transformada de Fourier:

$$\left.\begin{array}{l} V(f) = X(f)H_1(f) \\ Y(f) = V(f)H_2(f) \end{array}\right\} Y(f) = \left(X(f)H_1(f)\right)H_2(f)$$

como para calcular la respuesta impulsional, o la repuesta en frecuencia, la excitación tiene que ser una Delta de Dirac, y su transformada vale 1:

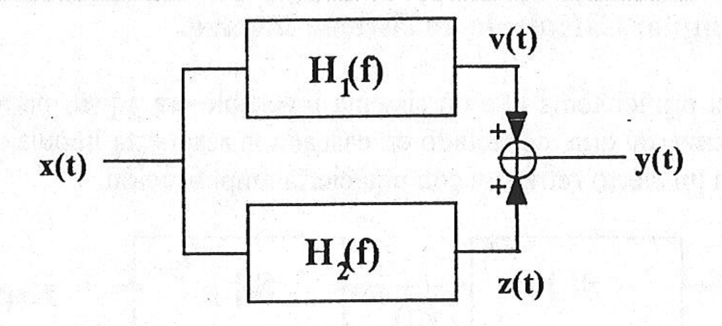
$$H(f)=H_1(f)H_2(f)$$

Por tanto, el sistema equivalente queda:

x(t) — $H_1(f)\,H_2(f)$ — y(t)

Se habrá calculado por separado $H_1(f)$ y $H_2(f)$ introduciendo una δ(t) en cada uno de los sistema y realizando la transformada de la respuesta impulsional.

En paralelo:



$$\left.\begin{array}{l} V(f)=X(f)H_1(f) \\ Z(f)=X(f)H_2(f) \\ Y(f)=V(f)+Z(f) \end{array}\right\} Y(f)=X(f)\left[H_1(f)+H_2(f)\right]$$

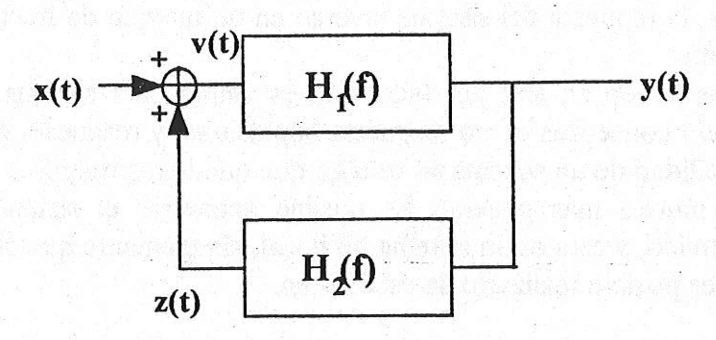
Si se sustituye X(f) por la transformada de la Delta de Dirac:

$$H(f)=H_1(f)+H_2(f)$$

Por tanto, el sistema equivalente queda:

x(t) — $H_1(f)+H_2(f)$ — y(t)

Realimentación:



$$Z(f)=Y(f)H_2(f)$$
$$V(f)=X(f)+Z(f)=X(f)+Y(f)H_2(f)$$
$$Y(f)=V(f)H_1(f)=[X(f)+Y(f)H_2(f)]H_1(f)$$

$$Y(f)=\frac{H_1(f)}{1-H_1(f)H_2(f)}X(f)$$

Sustituyendo X(f) por la transformada de una Delta de Dirac:

$$H(f)=\frac{H_1(f)}{1-H_1(f)H_2(f)}$$

De esta forma, se puede sustituir los dos bloques más el sumador, por un sistema con función de transferencia H(f).

Evidentemente, todos los cálculos realizados para interconectar sistema, se pueden hacer en el dominio temporal, pero no son tan fáciles de resolver.

2.7.2. Ejemplo: Cálculo de un sistema inverso.

Se vio en el primer tema que un sistema invertible era aquel, para él que se podía encontrar otro sistema, tal que, conectado en cascada la respuesta impulsional total sea una Delta de Dirac, con un cierto retraso y con una cierta amplificación.

x(t) — **S[ ]** — **y(t)** — **Si[ ]** — **Kx(t-t$_0$)**

$$h(t)*h_I(t)=K\delta(t-t_0)$$
$$H(f)H_I(f)=Ke^{-j2\pi ft_0}$$

Por tanto, para encontrar el sistema inverso a un sistema cuya respuesta el frecuencia sea H(f), simplemente hay que despejar de la igualdad anterior:

$$H_I(f)=\frac{Ke^{j2\pi ft_0}}{H(f)}$$

Esta operación siempre se puede realizar, lo que no significa, que el resultado alcanzado sea realizable fisicamente, por ejemplo, no es realizable un sistema $H_I(f)$ que en algún punto valga infinito.

Por otra parte no es necesario que un sistema invierta a otro en todo el margen de frecuencias, sino que simplemente ha de hacerlo en el margen de frecuencia en el que se va a utilizar es sistema, la repuesta del sistema inverso en un margen de frecuencias que no se utilizará es indiferente.

El cálculo realizado en este apartado sólo es válido para sistemas lineales, puesto que se està utilizando conceptos como respuesta impulsional y respuesta en frequencia. Sin embargo, la invertibilidad de un sistema no es algo que quede restringido a sistemas lineales, es una propiedad mucho más general. Es posible encontrar el sistema inverso de un amplificador logarítmico, y este es un sistema no lineal, simplemente que el cálculo de dicho sistema inverso no es posible realizarlo de esta forma.

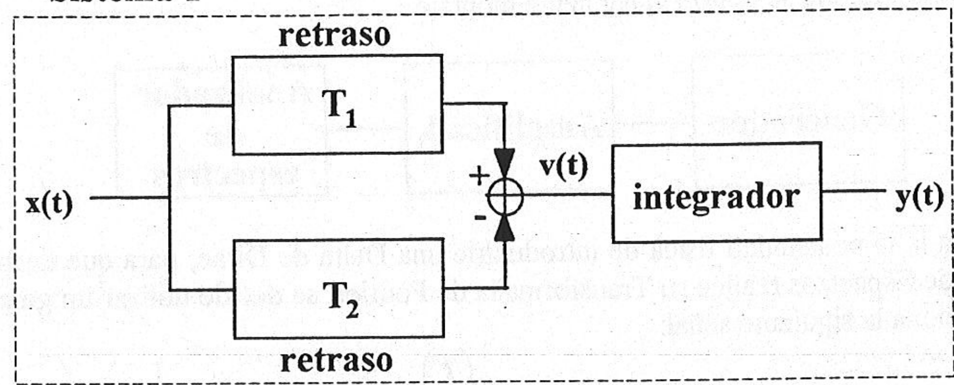
2.7.3. Ejemplo: Conexión de dos sistema en cascada.

Se propone calcular la respuesta impulsional de dos sistemas como él siguiente conectados en cascada:

En el sistema de la figura se establece la condición:

$T_1 > T_2$





Primeramente se debe analizar un sistema por separado y después se interconectarán los dos sistemas.

Se calcula la respuesta impulsional, excitando el sistema 1 con una Delta de Dirac.

$$v(t) = \delta(t - T_1) - \delta(t - T_2)$$

$$y(t) = h(t) = \int_{-\infty}^{t} \left[\delta(\tau - T_1) - \delta(\tau - T_2)\right] d\tau = u(t - T_1) - u(t - T_2) = -\prod\left(\frac{t - \frac{T_1 + T_2}{2}}{T_1 - T_2}\right)$$

Si ahora, se encuentra la respuesta impulsional:

$$H(f) = F\{h(t)\} = -\left(T_1 - T_2\right)\operatorname{sinc}\left[f\left(T_1 - T_2\right)\right] e^{-j2\pi f \frac{T_1 + T_2}{2}}$$

Por último, se conectan los dos sistemas en cascada:

x(t) → Sistema 1 → y(t) → Sistema 1 → z(t)

$$z(t) = \left(x(t) * h(t)\right) * h(t) \underset{x(t)=\delta(t)}{=} h(t) * h(t)$$

en términos de frecuencia:

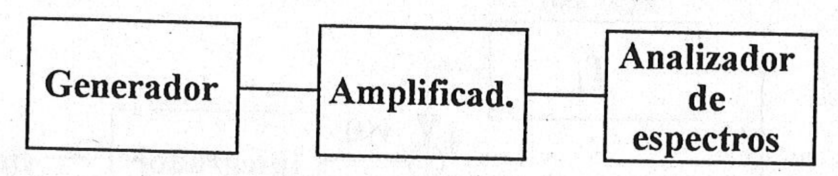
$$H_T(f) = H(f)H(f) = \left(T_1 - T_2\right)^2 \operatorname{sinc}^2\left[f\left(T_1 - T_2\right)\right] e^{-j2\pi f (T_1 + T_2)}$$

y se realiza la antitransformada de Fourier:

$$h_T(t) = \left(T_1 - T_2\right) \bigwedge\left(\frac{t - \left(T_1 + T_2\right)}{T_1 - T_2}\right)$$

2.7.4. Ejemplo: Cálculo de la respuesta en frecuencia de un amplificador.

Se dispone de un amplificador de audio, del cual se quiere saber su respuesta en frecuencia. Para lo que se realiza el siguiente montaje.



Dada la imposibilidad física de introducirle una Delta de Dirac, para que después el Analizador de Espectros realice su Transformada de Fourier, se decide utilizar un generador que proporciona la siguiente señal:

$$x(t) = A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

El generador permite variar la anchura del pulso, es decir, τ, y la amplitud del pulso **A**.

Evidentemente, utilizar un pulso y no una Delta de Dirac producirá un error en la respuesta en frecuencia medida. ¿Cuánto tiene de valer τ, para que el error cometido a cualquiera de las frecuencias donde se realiza la medida sea inferior a un 1%, si además, se quiere que la respuesta del sistema a la continua sea exactamente la medida?

Nota: El Analizador de Espectros es un instrumento que calcula y representa la Transformada de Fourier de una señal.

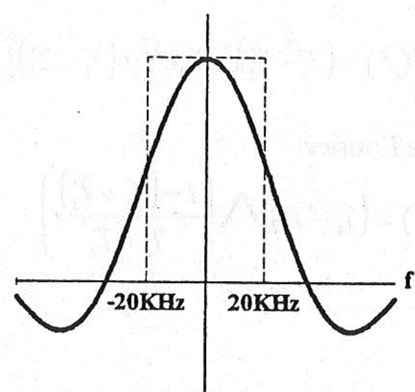
Solución:

Se supone que el amplificador tiene una respuesta en frecuencia H(f), por tanto, la señal que medirá el Analizador de Espectros será:

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

$$Y(f) = H(f)A\tau\,\text{sinc}(f\tau)$$

El resultado obtenido se está multiplicando la respuesta en frecuencia del amplificador por una función sinc, que no pondera por igual todas las frecuencias. Si la respuesta en frecuencia del amplificador es constante a todas las frecuencias, cosa deseable, se obtendrá la multiplicación de las dos funciones superpuestas en la siguiente gráfica.



De un primer análisis, se puede observar que el valor de τ tiene que ser lo suficientemente pequeño como para que el primer cero de la función sinc no este en el

margen de frecuencias donde se realizará la medida, puesto que si está dentro el error cometido será demasiado grande, sería del 100%.

Por otra parte, el error será mayor cuanto más alejado del origen de coordenadas se esté. Por consiguiente, la condición de error máximo se impondrá en la máxima frecuencia a medir, como el amplificador es de audio, la frecuencia máxima son 20KHz.

Si se define el error como un error relativo:

$$\text{error relativo} = \frac{\text{medida correcta - medida con error}}{\text{medida correcta}}$$

Conocida la medida correcta H(f) y la real Y(f), solamente hay que imponer la condición que el error sea menor de un 1%:

$$\frac{H(20KHz) - A\tau\,\text{sinc}(20KHz\tau)H(20KHz)}{H(20KHz)}100 = 1$$

Imponiendo la otra condición, que el valor de continua sea correcto:

$$\frac{H(0Hz) - A\,\tau H(0KHz)}{H(0KHz)} = 0 \rightarrow A\,\tau = 1$$

queda:

$$\frac{\text{sen}(20000\pi\tau)}{20000\pi\tau} = 0.99$$

Si se resuelve esta ecuación, por cálculo numérico, o recurriendo a la tabla de valores de la función sinc, se llega al resultado:

$$\tau \approx 3.12\,10^{-6}\,seg.$$

$$A \approx 320\,KV.$$

Ahora, se supone que el generador no es capaz de dar esos valores, ¿cómo se modificaría el montaje, si no se quiere cometer ningún error?

Solución:

Si no se modifica el montaje se está midiendo:

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

mientras que lo que se quiere medir es:

$$Y(f) = H(f)$$

Por tanto, se tendrá que introducir un sistema que permita compensar los errores que introduce la transformada del pulso. La solución es introducir un sistema de tenga una respuesta en frecuencia inversa a la del pulso, para tener:

$$Y(f) = H(f)X(f)\frac{1}{X(f)} = H(f)$$

Si se tiene en cuenta la transformada del pulso se tiene que el sistema tiene que ser:

$$\frac{1}{X(f)} = \frac{1}{A\tau\,\text{sinc}(f\tau)}.$$

Este filtro no es realizable, puesto que tiene que valer infinito en valores de frecuencia iguales a los múltiplos del inverso de τ. Pero como la medida tiene que realizarse para valores de frecuencia menores de 20KHz y se ha elegido τ para que el primer cero esté fuere de la banda de 0-20KHz, se puede realizar un sistema, con la respuesta en frecuencia igual al inverso de la función sinc, pero solamente hasta los 20KHz. Así, el filtro que hay de colocar antes del Analizador de Espectros es por ejemplo:

$$H_I(f)=\frac{1}{X(f)}\Pi\left(\frac{f}{40KHz}\right)=\frac{1}{A\tau\,\mathrm{sinc}(f\tau)}\Pi\left(\frac{f}{40KHz}\right)$$

Véase que se aplica la condición de sistema inverso de forma, podría decirse práctica, es decir, solamente en el margen de frecuencias que interesa, tal como se comentó en el apartado 2.7.2.

2.8. Densidad espectral y correlación.

2.8.1. Producto escalar de dos funciones.

El producto escalar de dos funciones ,x(t) e y(t), del mismo tipo, energía o potencia media finita, se define como:

$$<x(t),y(t)>=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)y^*(t)dt & \text{para señales de energía finita}\\ \lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)y^*(t)dt & \text{para señales de potencia media finita}\end{cases}$$

En señales periódicas, se simplifica siendo:

$$<x(t),y(t)>=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)y^*(t)dt$$

De la definición de producto escalar se puede sacar un consecuencia directa: el producto escalar de una función consigo mismo es igual a la energía o potencia media de la señal.

$$<x(t),x(t)>=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)x^*(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt \text{ señal de energía finita}$$

$$<x(t),x(t)>=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)x^*(t)dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt \text{ señal de potencia media finita}$$

Pasando a ver la interpretación que se puede dar al producto escalar, para ello conviene apoyarse en la desigualdad de Schwartz, la cual dice:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}x(t)y^*(t)dt\right|\le\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|dt\int_{-\infty}^{\infty}|y(t)|dt$$

Para que se cumpla el signo igual la señales x(t) e y(t) deben cumplir:

$$y(t)=\alpha x(t)$$

Por tanto, el producto escalar de dos señales está acotado por:

$$0\le<x(t),y(t)>\le\int_{-\infty}^{\infty}\alpha|x(t)|^2dt$$

En cierta forma el producto escalar está midiendo el parecido entre dos señales.

Si se tiene presente el producto escalar de dos vectores, se puede dar otra interpretación del producto escalar de dos funciones, el producto escalar da un valor proporcional a cuántas veces está contenida una función en la otra. Dicho de otra forma, cuál es la "proyección de una función sobre la otra".

Si el producto escalar es igual a cero se dice que las señales son ortogonales. Analizando los motivos por los cuales dos señales pueden ser ortogonales, se ve que hay dos motivos evidentes:

- Dos señales son ortogonales sí tiene simetría opuesta, es decir, una par y la otra impar.

- Dos señales son ortogonales sí no se solapan nunca en el tiempo o en frecuencia.

Hay señales que no cumplen ninguna de estás condiciones y son ortogonales, por ejemplo dos cosenos de diferente frecuencia, pero en los dos casos mencionados siempre lo son y son fáciles de deducir a partir de la representación gráfica.

2.8.2. Correlación cruzada.

La correlación cruzada es un generalización del producto escalar de dos funciones. No mide sólo la similitud entre dos señales, sino que además, da información sobre posible similitudes con un cierto desplazamiento temporal entre ellas y mide este desplazamiento.

Haciendo un símil geométrico daría información sobre el parecido de figuras situadas en el espacio con un patrón y daría su posición.

En general la correlación de señales de energía finita está definida como:

$$R_{xy}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)y^*(t-\tau)dt=<x(t),y(t-\tau)>=x(\tau)*y^*(-\tau)$$

$$R_{yx}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}y(t)x^*(t-\tau)dt=<y(t),x(t-\tau)>=y(\tau)*x^*(-\tau)$$

Como se puede observar, la correlación cruzada no tiene la propiedad conmutativa, es decir, en general:

$$R_{xy}(\tau)\neq R_{yx}(\tau)$$

Algunos autores definen la correlación cruzada de dos señales de la siguiente forma:

$$R_{xy}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t+\tau)y^*(t)dt$$

El significado y los valores son los mismos en los dos casos, es lo mismo retrasar y(t) respecto a x(t), que adelantar x(t) respecto a y(t).

Cuando las dos señales son la misma la correlación cruzada recibe un nombre especial, se denomina autocorrelación:

$$R_x(\tau)=R_{xx}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)x^*(t-\tau)dt$$

Hasta aquí se ha definido la correlación en señales de energía finita. En señales de potencia media finita, la correlación de define de forma muy parecida.

$$\psi_{xy}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)y^*(t-\tau)dt=<x(t),y(t-\tau)>$$

$$\psi_{yx}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}y(t)x^*(t-\tau)dt=<y(t),x(t-\tau)>$$

Para el caso en que las señales sean periódicas la expresión se simplifica, siendo:

$$\psi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)y^*(t-\tau)dt = < x(t), y(t-\tau) >$$

Todas las observaciones realizadas sobre la correlación de dos señales de energía finita son perfectamente aplicables a las señales de potencia media finita.

Hay una característica especialmente importante en la autocorrelación de señales, tanto de energía, como de potencia media finita, si bien, éstas últimas sólo para las que sean periódicas. Se vio que la densidad de energía/potencia media (señales periódicas) de una señal venía dada por la expresión $|X(f)|^2$. Una vez conocida la autocorrelación, esta misma expresión se puede calcular como la Transformada de Fourier de la autocorrelación. Se verá primero para señales de energía finita y luego para señales de potencia media finita periódicas.

Si se llama a la densidad espectral de energía como $S_{XX}(f)$, se tiene:

$$R_x(\tau) = R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j\omega(t-\tau)}df\right]^* dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty} X^*(f)e^{-j\omega t}e^{j\omega\tau}df\right]dt = \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f)\underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt\right]}_{X(f)}e^{j\omega\tau}df =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f)X(f)e^{j\omega\tau}df = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 e^{j\omega\tau}df = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f)e^{j\omega\tau}df = F^{-1}\{S_{xx}(f)\}$$

Por tanto, queda demostrado el par transformado:

$$R_{xx}(\tau) \leftrightarrow S_{xx}(f)$$

En el caso de señales de potencia media finita periódicas:

$$\psi_x(\tau) = \psi_{xx}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x^*(t-\tau)dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0(t-\tau)}\right]^* dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^* e^{jn\omega_0\tau}e^{-jn\omega_0 t}\right]dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^*\underbrace{\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt\right]}_{C_n}e^{jn\omega_0\tau} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^* C_n e^{jn\omega_0\tau} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 e^{jn\omega_0\tau}$$

Si se realiza la Transformada de Fourier a ambos extremos del desarrollo:

$$G_{xx}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \delta(f - nf_0)$$

Por otra parte, se tiene que la transformada de una señal periódica era:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\delta(f - nf_0) \Rightarrow |X(f)|^2 = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\delta(f - nf_0)\right|^2 =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\delta(f - nf_0)\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^*\delta(f - nf_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2\delta(f - nf_0)$$

De esta forma queda demostrado para señales de potencia media finita periódicas. En el caso que las señales no sean periódicas puede que no coincidan la transformada de la autocorrelación y el módulo al cuadrado de la Transformada de Fourier de x(t). En el caso

que no coincidan, la densidad espectral de potencia media será la transformada de la autocorrelación y no el módulo al cuadrado de la transformada de la señal.

2.8.3. Propiedades de la correlación.

1) $R_{xy}(\tau) = R^*_{yx}(-\tau) \Rightarrow S_{xy}(f) = S^*_{yx}(f)$

Si x(t)=y(t) $R_{xx}(\tau) = R^*_{xx}(-\tau) \Rightarrow S_{xx}(f)$ es real

Sí, además, x(t) es real, $R_{XX}(\tau)$ es real y par.

Todas estas afirmaciones se pueden demostrar fácilmente sustituyendo las correlaciones por su expresión integral.

2) $R_{YX}(\tau)$ no depende del origen de tiempos solamente del retardo de una señal respecto a otra.

3) $R_{XX}(\tau)$ es máxima en el origen $|R_{xx}(\tau)| \leq R_{xx}(0)$

Por otra parte, la autocorrelación en el origen es la energía de la señal.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f)e^{j\omega\tau}df\Big|_{\tau=0} = R_{xx}(0)$$

4) En sistema L.T.I., las correlaciones de las señales de la entrada y la salida están relacionadas:

x(t) —— [**h(t)**] —— **y(t)**

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda$$

Las distintas correlaciones de las señales de entrada y salida son:

$$R_{xx}(\tau) = x(\tau) * x^*(-\tau)$$
$$R_{yx}(\tau) = y(\tau) * x^*(-\tau) = x(\tau) * h(\tau) * x^*(-\tau) = R_{xx}(\tau) * h(\tau)$$
$$R_{xy}(\tau) = x(\tau) * y^*(-\tau) = x(\tau) * h^*(-\tau) * x^*(-\tau) = R_{xx}(\tau) * h^*(-\tau)$$
$$R_{yy}(\tau) = y(\tau) * y^*(-\tau) = h(\tau) * x(\tau) * h^*(-\tau) * x^*(-\tau) = R_{xx}(\tau) * h^*(-\tau) * h(\tau)$$

Con lo que en el dominio de la frecuencia queda:

$$S_{yx}(f) = S_{xx}(f)H(f)$$
$$S_{xy}(f) = S_{xx}(f)H^*(f)$$
$$S_{yy}(f) = S_{xx}(f)|H(f)|^2$$

Para concluir, es importante tener en cuenta que a diferencia del espectro de una señal, su densidad de energía, o en su caso, la de potencia media finita, no es única para cada señal, puede haber dos señales diferentes que tengan la misma función de densidad.

La densidad espectral no da tanta información como el espectro de una señal, pero a veces no es posible calcular un espectro y es lo único que se puede calcular, por ejemplo, las señales aleatorias.

[illegible] la densidad espectral [illegible] la transformada de [illegible] real y par [illegible].

2) $S_x(f)$ [illegible] $S_x(f)$ es real [illegible]

Si $x(t)$ es real: $R_x(\tau) = R_x(-\tau) \rightarrow S_x(f) = S_x(-f)$ es real

Si además $x(t)$ es real, $R_x(\tau)$ es real y par.

Estas propiedades se pueden demostrar fácilmente sustituyendo las condiciones en la integral.

3) $S_x(f) \geq 0$ [illegible] la densidad espectral de potencia siempre es [illegible] positiva [illegible].

3) $R_x(0)$ es máximo en el origen: $R_x(0) \geq R_x(\tau)$

Por tanto, el valor de la autocorrelación en el origen es la energía de la señal.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\,df = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) e^{j2\pi f\tau}\,df \Big|_{\tau=0} = R_x(0)$$

4) En sistemas LTI, las correlaciones de las señales de la entrada y la salida están relacionadas:

$x(t) \rightarrow$ [$h(t)$] $\rightarrow y(t)$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) h(t-\lambda)\,d\lambda$$

Las distintas correlaciones de las señales de entrada y salida son:

$$R_x(\tau) = x(\tau) * x^*(-\tau)$$

$$R_{yx}(\tau) = y(\tau) * x^*(-\tau) = x(\tau) * h(\tau) * x^*(-\tau) = R_x(\tau) * h(\tau)$$

$$R_{xy}(\tau) = x(\tau) * y^*(-\tau) = x(\tau) * h^*(-\tau) * x^*(-\tau) = R_x(\tau) * h^*(-\tau)$$

$$R_y(\tau) = y(\tau) * y^*(-\tau) = h(\tau) * x(\tau) * h^*(-\tau) * x^*(-\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)$$

Con lo que en el dominio de la frecuencia queda:

$$S_{yx}(f) = S_x(f) H(f)$$

$$S_{xy}(f) = S_x(f) H^*(f)$$

$$S_y(f) = S_x(f) |H(f)|^2$$

Para concluir, es conveniente tener en cuenta que a diferencia del espectro de una señal, su densidad de energía, o en su caso, la de potencia media finita, no es única para cada señal, puede haber dos señales diferentes que tengan la misma función de densidad.

La densidad espectral no da tanta información como el espectro de una señal, pero a veces no es posible calcular su espectro y [illegible] se puede calcular, por ejemplo, en señales aleatorias.

DISCRET

ENERGIA DEL SENYAL	$E=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lvert x(n)\rvert^2$
POTENCIA MITJANA DEL SENYAL	$P=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\lvert x(n)\rvert^2$ $P=\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1}\lvert x(n)\rvert^2$
MITJANA DEL SENYAL	$E\{x(n)\}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}x(n)$
COEFICIENTS DESENVOLUPAMENT SERIE DE FOURIER	$C_k=\frac{1}{N_0}\sum_{k=0}^{N_0-1}x(n)e^{-j2\pi\frac{1}{N_0}kn}$
SERIE DE FOURIER	$x(n)=\sum_{n=0}^{N_0-1}C_k e^{j2\pi\frac{1}{N_0}kn}$
CONVOLUCIO	$x(n)*y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)y(n-k)$
TRANSFORMADA Z	$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$
TRANSFORMADA Z INVERSA	$x(n)=\frac{1}{2j\pi}\oint_c X(z)z^{n-1}dz$ amb $c\in$ R.O.C
TRANSFORMADA DE FOURIER	$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j2\pi fn}$
TRANSFORMADA INVERSA DE FOURIER	$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j2\pi fn}d\omega$
TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER	$X[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$
TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER INVERSA	$X[k]=\sum_{k=0}^{N-1}x[k]e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$
CONVOLUCIO CIRCULAR	$x(\omega)\otimes y(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(\tau)y(\omega-\tau)d\tau$ senyals periòdics de periode 2π $x(n)\otimes y(n)=\sum_{k=0}^{N_0-1}x(k)y(n-k)$ senyals periòdics de periode N_0

PRODUCTE ESCALAR	$< x(n), y(n) >= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y^*(n)$ $< x(n), y(n) >= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n) y^*(n)$ $< x(n), y(n) >= \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x(n) y^*(n)$
CORRELACIO	$R_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y^*(n-l) = x(l) * y^*(-l)$ $\psi_{xy}(l) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n) y^*(n-l)$ $\psi_{xy}(l) = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x(n) y^*(n-l)$
RETARD DE GRUP	$T_g = -\frac{d}{d\omega} \arg\left[H(e^{j\omega})\right]$

TRANSFORMADES DE FOURIER

FUNCIO	v(t)	V(f)
POLS	$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\tau \operatorname{sinc} f\tau$
TRIANGLE	$\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\tau \operatorname{sinc}^2 f\tau$
GAUSSIANA	$e^{-\pi(bt)^2}$	$\frac{1}{b}e^{-\pi(f/b)^2}$
EXPONENCIAL CAUSAL	$e^{-bt}\,u(t)$	$\frac{1}{b+j2\pi f}$
EXPONENCIAL SIMETRICA	$e^{-b\lvert t\rvert}$	$\frac{2b}{b^2+(2\pi f)^2}$
SINC	$\operatorname{sinc}(2Wt)$	$\frac{1}{2W}\Pi\left(\frac{f}{2W}\right)$
SINC AL QUADRAT	$\operatorname{sinc}^2(2Wt)$	$\frac{1}{2W}\Lambda\left(\frac{f}{2W}\right)$
CONSTANT	1	$\delta(f)$
FASOR	$e^{j(\omega_c t+\Phi)}$	$e^{j\Phi}\delta(f-f_c)$
TO	$\cos(\omega_c t+\Phi)$	$\frac{1}{2}\left[e^{j\Phi}\delta(f-f_c)+e^{-j\Phi}\delta(f+f_c)\right]$
IMPULS	$\delta(t-t_d)$	$e^{-j\omega t_d}$
MOSTREIG	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$	$f_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-nf_s)$
SIGNE	$\operatorname{sgn}(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$
ESGLAO	$u(t)$	$\frac{1}{j2\pi f}+\frac{\delta(f)}{2}$

PROPIETATS DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

OPERACIO	FUNCIO	TRANSFORMADA
SUPERPOSICIO	$a_1v_1(t)+a_2v_2(t)$	$a_1V_1(f)+a_2V_2(f)$
RETARD TEMPORAL	$v(t-t_d)$	$V(f)e^{-j\omega t_d}$
CANVI D'ESCALA	$v(\alpha t)$	$\frac{1}{\lvert\alpha\rvert}V\left(\frac{f}{\alpha}\right)$
CONJUGACIO	$v^*(t)$	$V^*(-f)$
DUALITAT	$V(t)$	$v(-f)$
TRASLACIO EN FRECUENCIA	$v(t)e^{j\omega_c t}$	$V(f-f_c)$
MODULACIO	$v(t)\cos(\omega_c t+\Phi)$	$\frac{1}{2}\left[V(f-f_c)e^{j\Phi}+V(f+f_c)e^{-j\Phi}\right]$
DIFERENCIACIO	$\frac{d^n v(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n V(f)$
INTEGRACIO	$\int_{-\infty}^{t} v(\lambda)d\lambda$	$\frac{1}{j2\pi f}V(f)+\frac{1}{2}V(0)\delta(f)$
CONVOLUCIO	$v(t)*w(t)$	$V(f)W(f)$
MULTIPLICACIO	$v(t)w(t)$	$V(f)*W(f)$
MULTIPLICACIO PER t^n	$t^n v(t)$	$(-j2\pi)^{-n}\frac{d^nV(f)}{df^n}$

TRANSFORMADES Z

SEQÜENCIA	TRANSFORMADA	R.O.C
$\delta[n]$	1	Tot z
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < 1$
$\delta[n-m]$	z^{-m}	Tot z meys 0 (si m > 0) o ∞ (si m < 0)
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$\cos[\omega_0 n]u[n]$	$\frac{1-\cos[\omega_0]z^{-1}}{1-2\cos[\omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\sin[\omega_0 n]u[n]$	$\frac{\sin[\omega_0]z^{-1}}{1-2\cos[\omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$r^n\cos[\omega_0 n]u[n]$	$\frac{1-r\cos[\omega_0]z^{-1}}{1-2r\cos[\omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$
$r^n\sin[\omega_0 n]u[n]$	$\frac{r\sin[\omega_0]z^{-1}}{1-2r\cos[\omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$
$\begin{cases} a^n, & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{resta} \end{cases}$	$\frac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 0$

PROPIETATS DE LA TRANSFORMADA Z

SEQUENCIA	TRANSFORMADA	R.O.C
$x(n)$	$X(z)$	R_x
$x_1(n)$	$X_1(z)$	R_{x_1}
$x_2(n)$	$X_2(z)$	R_{x_2}
$ax_1(n)+bx_2(n)$	$aX_1(z)+bX_2(z)$	Conté R_{x_1} I R_{x_2}
$x(n-n_0)$	$z^{-n_0}X(z)$	R_x excepte possible addició o supressió de 0 o ∞
$nx(n)$	$-z\dfrac{d}{dz}X(z)$	R_x excepte possible addició o supressió de 0 o ∞
$z_0^n x(n)$	$X\left(\dfrac{z}{z_0}\right)$	$\lvert z_0\rvert R_x$
$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	R_x
$\Re e\{x(n)\}$	$\dfrac{1}{2}\left[X(z)+X^*(z^*)\right]$	Conté R_x
$\Im m\{x(n)\}$	$\dfrac{1}{2j}\left[X(z)-X^*(z^*)\right]$	Conté R_x
$x(-n)$	$X\left(\dfrac{1}{z}\right)$	Conté $\dfrac{1}{R_x}$
$x_1(n)*x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$	Conté R_{x_1} I R_{x_2}
$x_1(n)x_2(n)$	$x(n)=\dfrac{1}{2j\pi}\oint_c X_1(v)X_2(\frac{z}{v})v^{-1}dv$	
RELACIO DE PARSEVAL	$\sum_{N=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n)=\dfrac{1}{2j\pi}\oint_c X_1(v)X_2^*(\frac{1}{v^*})v^{-1}dv$	
TEOREMA DEL VALOR INICIAL	$x(n)=0,\quad n<0 \Rightarrow \lim_{z\to\infty} X(z)=x(0)$	

TRANSFORMADES DE FOURIER DE SENYALS DISCRETS

SEQÜENCIA	TRANSFORMADA
$\delta[n]$	1
$\delta[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
$1 \quad (-\infty < n > \infty)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi k)$
$a^n\, \mathrm{u}[n] \quad (\lvert a\rvert < 1)$	$\dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
$\mathrm{u}[n]$	$\dfrac{1}{1-e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi k)$
$(n+1)a^n\, \mathrm{u}[n] \quad (\lvert a\rvert < 1)$	$\dfrac{1}{\left(1-ae^{-j\omega}\right)^2}$
$\dfrac{r^n \sin[\omega_p(n+1)]}{\sin[\omega_p]}\mathrm{u}[n] \quad (\lvert r\rvert < 1)$	$\dfrac{1}{1-2r\cos[\omega_p]e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$
$\dfrac{\sin[\omega_c n]}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \lvert\omega\rvert < \omega_c \\ 0, & \omega_c < \lvert\omega\rvert \le \pi \end{cases}$
$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le M \\ 0, & \text{resta} \end{cases}$	$\dfrac{\sin[\omega(M+1)/2]}{\sin[\omega/2]} e^{-j\omega M/2}$
$e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$
$\cos[\omega_0 n + \Phi]$	$\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[e^{j\Phi}\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) + e^{-j\Phi}\delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k) \right]$

PROPIETATS DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE SENYALS DISCRETS

SEQUENCIA	TRANSFORMADA
$x[n]$	$X(e^{j\omega})$
$y[n]$	$Y(e^{j\omega})$
$ax[n]+by[n]$	$aX(e^{j\omega})+bY(e^{j\omega})$
$x[n-n_d]$ (n_d un enter)	$e^{-j\omega n_d}X(e^{j\omega})$
$e^{j\omega_0 n}x[n]$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$ $X^*(e^{j\omega})$ si $x[n]$ é s real
$nx[n]$	$j\dfrac{d}{d\omega}X(e^{j\omega})$
$x[n]*y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
$x[n]y[n]$	$\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]y^*[n]=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})d\omega$	

TRANSFORMADES DISCRETES DE FOURIER

SEQUENCIA FINITA DE LONGITUD N	D.F.T. DE N PUNTS
$x[n]$	$X[k]$
$x_1[n],\quad x_2[n]$	$X_1[k],\quad X_2[k]$
$ax_1[n]+bx_2[n]$	$aX_1[k]+bX_2[k]$
$X[n]$	$Nx[((-k))_N]$
$x[((n-M))_N]$	$W_N^{Mk}X[k]$
$W_N^{-Ln}x[n]$	$X[((k-L))_N]$
$\sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[((n-m))_N]$	$X_1[k]X_2[k]$
$x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} X_1[l]X_2[((k-l))_N]$
$x^*[n]$	$X^*[((-k))_N]$
$x^*[((-n))_N]$	$X^*[k]$
$\Re e\{x[n]\}$	$X_{pp}[k]=\frac{1}{2}\{X[((k))_N]+X^*[((-k))_N]\}$
$j\Im m\{x[n]\}$	$X_{ip}[k]=\frac{1}{2}\{X[((k))_N]-X^*[((-k))_N]\}$
$x_{pp}[n]=\frac{1}{2}\{x[n]+x^*[((-n))_N]\}$	$\Re e\{X[k]\}$
$x_{ip}[n]=\frac{1}{2}\{x[n]-x^*[((-n))_N]\}$	$j\Im m\{X[k]\}$
Les seguents propietats només es poden utilitzar si $x[n]$ és real.	
Simetries	$\begin{cases} X[k]=X^*[((-k))_N] \\ \Re e\{X[k]\}=\Re e\{X^*[((-k))_N]\} \\ \Im m\{X[k]\}=-\Im m\{X^*[((-k))_N]\} \\ \lvert X[k]\rvert=\lvert X^*[((-k))_N]\rvert \\ \arg[X[k]]=-\arg[X^*[((-k))_N]] \end{cases}$
$x_{pp}[n]=\frac{1}{2}\{x[n]+x[((-n))_N]\}$	$\Re e\{X[k]\}$
$x_{ip}[n]=\frac{1}{2}\{x[n]-x[((-n))_N]\}$	$j\Im m\{X[k]\}$
NOTACIO	
$(\bullet)_N \Leftrightarrow$ desplaç ament circular de periode N	$W_N^{Ln} \Leftrightarrow e^{-j\frac{2\pi}{N}Ln}$